ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής
Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

Σημειώσεις για το μάθημα

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Γιώργος Ηλιόπουλος
Καθηγητής

Πειραιάς 2017

1 Πίνακες – Βασικοί συμβολισμοί

Μία συλλογή στοιχείων ενός συνόλου τοποθετημένα σε έναν ορθογώνιο σχηματισμό καλείται **πίνακας** (matrix). Αν και το σύνολο από το οποίο προέρχονται τα στοιχεία ενός πίνακα μπορεί να είναι οποιοδήποτε (π.χ. το σύνολο των πραγματικών αριθμών, το σύνολο των συναρτήσεων με το τάδε πεδίο ορισμού κλπ.), εμείς θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση των πραγματικών αριθμών. Τέτοιοι πίνακες καλούνται, ειδικότερα, *πραγματικοί πίνακες*. Εδώ θα τους λέμε απλώς «πίνακες» και θα εννοούμε «πραγματικοί πίνακες».

Μερικά παραδείγματα πινάκων είναι τα ακόλουθα:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.4 & 2/3 \\ -1 & 2.7 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 25 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 15 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Οι πίνακες συμβολίζονται, κλασσικά, με κεφαλαία γράμματα, Λέμε, π.χ., ο πίνακας A, ο πίνακας B κλπ. Σε πολλά βιβλία θα δείτε ότι τα σύμβολα πινάκων είναι τυπωμένα με έντονη (bold) γραμματοσειρά. Εδώ δεν θα το κάνουμε όμως αυτό.

Το πρώτο σημαντικό χαρακτηριστικό ενός πίνακα είναι οι *διαστάσεις* του. Οι διαστάσεις ενός πίνακα είναι το πλήθος των *γραμμών* του και το πλήθος των *στηλών* του. Ένας πίνακας με n γραμμές και m στήλες λέμε ότι είναι ένας πίνακας διαστάσεων $n \times m$ (n επί m) ή, απλούστερα, ένας πίνακας $n \times m$. (Προφανώς ένας πίνακας $n \times m$ περιέχει συνολικά nm στοιχεία αλλά μην ερμηνεύετε το σύμβολο «$\times$» κυριολεκτικά ως σύμβολο πολλαπλασιασμού: δεν κάνουμε πραγματικά την πράξη n επί m.) Για παράδειγμα, οι παραπάνω πίνακες είναι, αντίστοιχα, 2×3, 3×2, 1×4, 3×1, 2×2, και 3×3.

Ένας πίνακας με μία γραμμή και μία στήλη έχει μόνο ένα στοιχείο και θα θεωρούμε ότι ταυτίζεται με αυτό το μοναδικό στοιχείο του.

Επειδή οι διαστάσεις των πινάκων παίζουν σημαντικό ρόλο σε διάφορες διαδικασίες, στο μάθημά μας θα βρούμε βολικό να τις σημειώνουμε κάτω από τα σύμβολά τους. Έτσι, π.χ., θα γράφουμε

$$\underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \underset{3\times 2}{B} = \begin{pmatrix} 0.4 & 2/3 \\ -1 & 2.7 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \underset{2\times 2}{C} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \underset{1\times 1}{D} = (-2) \equiv -2 \quad \text{κλπ.}$$

Γενικά, όταν γράφουμε $\underset{n\times m}{A}$ θα εννοούμε έναν πίνακα με n γραμμές και m στήλες. Φυσικά πάντα θα ισχύει $n \geqslant 1$ και $m \geqslant 1$.

Τις δύο ανισότητες $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ θα μπορούσαμε να τις εκφράσουμε μέσω μόνο μίας: $\min\{n, m\} \geqslant 1$: Γενικά, με $\min B$ συμβολίζουμε το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου B, επομένως $\min\{n, m\}$ είναι το ελάχιστο μεταξύ των n και m. Αν το ελάχιστο από τα δυο τους είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 1 τότε αναγκαστικά και τα δύο είναι μεγαλύτερα ή ίσα του 1.

Πριν συνεχίσουμε θα πρέπει να σιγουρευτούμε ότι καταλαβαίνουμε τα σύμβολα με δείκτες οπότε διαβάστε πρώτα την ενότητα που ακολουθεί.

Σύμβολα με δείκτες – Αθροίσματα

Όπως ξέρετε, στα Μαθηματικά προκειμένου να μιλήσουμε γενικά χρησιμοποιούμε σύμβολα για να αντιπροσωπεύσουμε αριθμούς (ή στοιχεία γενικότερων συνόλων). Τέτοια σύμβολα είναι τα $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, n, m, k$ κλπ. που συνήθως συμβολίζουν αριθμούς, τα f, g, h κλπ. που συνήθως συμβολίζουν συναρτήσεις, τα A, B, C, D κλπ. που θα χρησιμοποιούμε εδώ για τους πίνακες, τα X, Y, Z, W κλπ. που θα χρησιμοποιείτε στα επόμενα εξάμηνα για τις τυχαίες μεταβλητές που είναι πολύ σημαντικά αντικείμενα των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής κ.ά. Επειδή όμως τα γράμματα της ελληνικής και αγγλικής αλφαβήτου είναι πεπερασμένα, προτιμούμε πολλές φορές να χρησιμοποιήσουμε για πολλά αντικείμενα (π.χ. αριθμούς) το ίδιο γράμμα-σύμβολο βάζοντάς του έναν δείκτη ώστε να τα ξεχωρίζουμε. Για παράδειγμα, τρία διαφορετικά αντικείμενα συχνά τα συμβολίζουμε με x_1, x_2, x_3 (ή y_1, y_2, y_3 ή $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ κλπ.). Τα σύμβολα x_1, x_2, x_3 τα διαβάζουμε «χι ένα», «χι δύο», «χι τρία» (αν και πιο σωστά θα έπρεπε να τα διαβάζουμε «εξ ένα», «εξ δύο», «εξ τρία» μια και χρησιμοποιείται το αγγλικό γράμμα x (εξ) και όχι το ελληνικό χ (χι). Όταν το πλήθος των αντικειμένων είναι επίσης ένας γενικός αριθμός n (που δεν είναι απολύτως καθορισμένος έτσι ώστε να μπορούμε να μιλήσουμε γενικά) γράφουμε

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

ή και

$$x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Στην πρώτη γραμμή είναι φανερό το τι γίνεται: Έχουμε τα x_1, x_2 κλπ. μέχρι ο δείκτης να φτάσει στο n που είναι ο μεγαλύτερος δείκτης οπότε και φτάνουμε στο x_n. Στην δεύτερη γραμμή γράφω ακριβώς το ίδιο πράγμα: Έχουμε τα αντικείμενα x_i με τον δείκτη i να ξεκινάει από το 1 και να φτάνει στο n, δηλαδή τα x_1, x_2 κλπ. μέχρι το x_n. Το ίδιο κάνουμε και όταν το n είναι καθορισμένο αλλά «μεγάλο». Π.χ. αν $n = 20$ γράφουμε $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ ή και $x_i,\ i = 1, \ldots, 20$, για να μην καθόμαστε να γράφουμε όλη την εικοσάδα.

Ο συμβολισμός με τους δείκτες είναι πολύ βολικός και για αρκετές άλλες δουλειές. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να γράψουμε το άθροισμα των n ποσοτήτων $x_1, \ldots, x_n$, αντί να το γράψουμε $x_1 + \cdots + x_n$ το γράφουμε

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Αυτό το μεγάλο κεφαλαίο σίγμα είναι το σύμβολο της άθροισης. Κάτω από αυτό αναγράφεται ο δείκτης-μεταβλητή της άθροισης και η τιμή από την οποία ξεκινάει. Πάνω από αυτό αναγράφεται η τιμή στην οποία τελειώνει. Έτσι, ο παραπάνω συμβολισμός μας λέει ότι πρέπει να αθροίσουμε τα x_i για i από 1 μέχρι n και να πάρουμε το άθροισμα $x_1 + \cdots + x_n$. Το n μπορεί να είναι και καθορισμένο. Μερικά ακόμη παραδείγματα είναι τα εξής:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5, \quad \sum_{i=3}^{6} y_i = y_3 + y_4 + y_5 + y_6, \quad \sum_{i=-2}^{2} u_i = u_{-2} + u_{-1} + u_0 + u_1 + u_2$$

(ναι, μπορεί να έχουμε και αρνητικούς δείκτες ή και το μηδέν). Φυσικά, δεν είναι απαραίτητο η μεταβλητή της άθροισης να είναι το i. Π.χ., το πρώτο άθροισμα μπορούμε να το γράψουμε και ως

$$\sum_{j=1}^{5} x_j \quad \text{ή και} \quad \sum_{\nu=1}^{5} x_\nu \quad \text{ή και} \quad \sum_{t=1}^{5} x_t \quad \text{κλπ.}$$

Και τα τρία αυτά είναι το ίδιο πράγμα· δεν έχει σημασία πώς θα συμβολίσουμε την μεταβλητή άθροισης. Μπορούμε επίσης να κάνουμε και άλλα πράγματα με αυτήν την μεταβλητή. Για παράδειγμα,

$$\sum_{i=1}^{4} i x_i = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4, \quad \sum_{j=0}^{3} y^j = 1 + y + y^2 + y^3$$

$$\sum_{k=1}^{3} x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \quad \sum_{i=0}^{4} x_{i+1} y_{5-i} = x_1 y_5 + x_2 y_4 + x_3 y_3 + x_4 y_2 + x_5 y_1$$

Η διαδικασία, γενικά, έχει ως εξής: Ο δείκτης ξεκινάει από κάποια τιμή που φαίνεται κάτω από το σύμβολο της άθροισης, το μεγάλο σίγμα. «Μπαίνουμε» μέσα στο άθροισμα και όπου βλέπουμε τον δείκτη τον αντικαθιστούμε με αυτήν την τιμή ώστε να πάρουμε τον πρώτο όρο του αθροίσματος. Γυρίζουμε πίσω και παίρνουμε την επόμενη τιμή του δείκτη. Ξαναμπαίνουμε μέσα και όπου βλέπουμε τον δείκτη τον αντικαθιστούμε με αυτήν την τιμή ώστε να πάρουμε τον επόμενο όρο. Συνεχίζουμε την διαδικασία μέχρι και την τελευταία τιμή η οποία είναι αυτή που βρίσκεται πάνω από το σύμβολο της άθροισης.
Παρεμπιπτόντως, την ίδια διαδικασία ακολουθούμε και στην περίπτωση γινομένων. Το σύμβολο για το γινόμενο n ποσοτήτων $x_1, \ldots, x_n$ είναι το κεφαλαίο πι:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 x_2 \cdots x_n.$$

Το ίδιο κάνουμε και για την ένωση ή τομή συνόλων. Π.χ. για τα σύνολα $B_1, B_2, \ldots, B_n$ γράφουμε

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n \quad \text{και} \quad \bigcap_{i=1}^{n} B_i = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n$$

Δεν είναι δύσκολα όλα αυτά. Μόλις καταλάβετε τη λογική τους τελείωσε το θέμα.

Ας επιστρέψουμε τώρα στους πίνακές μας. Όπως είδαμε, ένα πίνακας $n \times m$ περιέχει nm στοιχεία. Προκειμένου να τα συμβολίσουμε αυτά και να δηλώσουμε την γραμμή και την στήλη στην οποία βρίσκονται (αυτό είναι πολύ σημαντικό) επιλέγουμε ένα σύμβολο (συνήθως το πεζό γράμμα που αντιστοιχεί στο σύμβολο του πίνακα) και αναγκαστικά χρησιμοποιούμε δύο δείκτες: τον πρώτο για τη γραμμή και τον δεύτερο για τη στήλη. Αν έχουμε επιλέξει το σύμβολο a για τα στοιχεία του πίνακα, τότε

$$a_{ij}$$

συμβολίζει το στοιχείο που βρίσκεται στην γραμμή i και στην στήλη j. (Διαβάζεται «άλφα άι τζέι» ή, πιο σωστά «έι άι τζέι» μια και a είναι το αγγλικό έι ενώ α είναι το ελληνικό άλφα.) Προσοχή όμως: Το ij που φαίνεται ως ένας δείκτης είναι δύο δείκτες γραμμένοι ο ένας δίπλα στον άλλον. (Δεν πρόκειται δηλαδή για το γινόμενο i επί j.) Αν πιστεύετε ότι θα ήταν καλύτερα αν γράφαμε

$$a_{i,j}$$

ώστε να ξεχωρίζουμε τους δείκτες έχετε δίκιο. Παραδοσιακά γράφουμε a_{ij} και αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης ξέρουμε ότι πρόκειται για δύο δείκτες. Πότε μπορεί να υπάρξει κίνδυνος σύγχυσης; Αν π.χ. θέλουμε να αναφερθούμε στο στοιχείο της αμέσως επόμενης από την i γραμμή, δηλαδή της $i + 1$. Το στοιχείο εκείνο το γράφουμε $a_{i+1,j}$ μια και αν γράφαμε a_{i+1j} πιθανότατα θα μπλεκόμασταν. Το κόμμα το χρησιμοποιούμε αναγκαστικά και όταν κάποιος από τους δείκτες έχει διψήφια τιμή. Για παράδειγμα, ενώ το στοιχείο που βρίσκεται στην τρίτη γραμμή και έκτη στήλη θα το γράφαμε a_{36} («άλφα τρία έξι») και το στοιχείο που βρίσκεται στην δεύτερη γραμμή και όγδοη στήλη θα το γράφαμε a_{28} («άλφα δύο οκτώ»), το στοιχείο που βρίσκεται στην ενδέκατη γραμμή και πέμπτη στήλη θα το γράψουμε $a_{11,5}$ («άλφα ένδεκα πέντε») και το στοιχείο που βρίσκεται στην τέταρτη γραμμή και δέκατη τέταρτη στήλη θα το γράψουμε $a_{4,14}$ («άλφα τέσσερα δεκατέσσερα»). Ο λόγος είναι προφανής: Τι θα σήμαινε a_{115}; Το στοιχείο της πρώτης γραμμής και δέκατης πέμπτης στήλης ή το στοιχείο της ενδέκατης γραμμής και πέμπτης στήλης; Γι' αυτό και βάζουμε το κόμμα.

Συχνά γράφουμε

$$\underset{n\times m}{A} = (a_{ij}), \quad \underset{s\times t}{B} = (b_{ij}), \quad \underset{k\times \ell}{C} = (c_{ij})$$

για να δηλώσουμε πώς θα συμβολίζουμε το γενικό στοιχείο του πίνακα: Τα παραπάνω λένε ότι στον πίνακα A το γενικό στοιχείο συμβολίζεται με a_{ij}, στον πίνακα B με b_{ij} και στον πίνακα C με c_{ij}. Κανείς βέβαια δεν μας υποχρεώνει να χρησιμοποιήσουμε το a για τον A, το b για τον B κλπ. Ό,τι θέλουμε κάνουμε. Απλώς συνηθίζεται να ταιριάζουμε τα σύμβολα.

Τα ακόλουθα παραδείγματα ξεκαθαρίζουν τις όποιες απορίες:

Το στοιχείο 11 του πίνακα — Το στοιχείο 12 του πίνακα — Το στοιχείο 13 του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

Το στοιχείο 21 του πίνακα — Το στοιχείο 22 του πίνακα — Το στοιχείο 23 του πίνακα

$$\underset{3\times 3}{B} = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad \underset{2\times 4}{D} = (d_{ij}) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \end{pmatrix},$$

Όταν το πλήθος των γραμμών ή/και των στηλών ενός πίνακα είναι γενικοί αριθμοί n ή/και m τότε αναγκαστικά βάζουμε αποσιωπητικά:

$$\underset{n\times m}{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \longleftarrow \text{Η γραμμή } i \text{ του πίνακα } A$$

Η στήλη j του πίνακα A

Με πλαίσιο είναι το στοιχείο ij του πίνακα[1]: Το στοιχείο που βρίσκεται στην γραμμή i και στην στήλη j.

Ένας πίνακας λέγεται μηδενικός αν έχει όλα τα στοιχεία του ίσα με μηδέν. Τον μηδενικό

[1] Συχνά αντί για «στοιχείο ij» λέμε «ij στοιχείο» μιμούμενοι την αγγλική σύνταξη του όρου «ij element».

πίνακα διαστάσεων $n \times m$ θα τον συμβολίζουμε με $\underset{n\times m}{\mathrm{O}}$, π.χ.

$$\underset{3\times 2}{\mathrm{O}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underset{2\times 5}{\mathrm{O}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ένας πίνακας λέγεται **τετραγωνικός** αν το πλήθος των γραμμών του ισούται με το πλήθος των στηλών του. Για παράδειγμα, οι ακόλουθοι πίνακες είναι τετραγωνικοί:

$$\underset{2\times 2}{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underset{3\times 3}{B} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/2 & 0 \\ 2 & 1 & 4/3 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Δύο πίνακες A, B λέμε ότι είναι **ίσοι** αν (α) έχουν τις ίδιες διαστάσεις και (β) τα αντίστοιχα στοιχεία τους συμπίπτουν:

$$\text{Αν } \underset{n\times m}{A} = (a_{ij}), \ \underset{n\times m}{B} = (b_{ij}) \quad \text{τότε} \quad A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \ \forall\, i, j.$$

Ο **ανάστροφος** ενός πίνακα A διαστάσεων $n \times m$ είναι ο πίνακας διαστάσεων $m \times n$ που έχει στήλες τις γραμμές του A και γραμμές τις στήλες του. Τον ανάστροφο του πίνακα A θα τον συμβολίζουμε με A'. Άλλοι συμβολισμοί που μπορεί να δείτε σε διάφορα βιβλία είναι A^T και A^t (τα T και t προέρχονται από την λέξη «transpose» που είναι ο αγγλικός όρος για τον ανάστροφο). Για παράδειγμα,

$$\text{αν} \quad \underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{τότε} \quad \underset{3\times 2}{A'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{αν} \quad \underset{4\times 4}{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -7 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{τότε} \quad \underset{4\times 4}{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ -7 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Επειδή η γραμμή i του A είναι η στήλη i του A' και η στήλη j του A είναι η γραμμή j του A', το στοιχείο ij του A' είναι το στοιχείο ji του A. (Δείτε το και στα παραπάνω παραδείγματα: Το στοιχείο 21 του A' είναι το στοιχείο 12 του A, το στοιχείο 22 του A' είναι το στοιχείο 22 του A, το στοιχείο 34 του B' είναι το στοιχείο 43 του B κλπ.)

Μία προφανής ιδιότητα του αναστρόφου είναι ότι ο ανάστροφός του συμπίπτει με τον αρχικό πίνακα:

$$(A')' = A$$

Καταλαβαίνετε γιατί;

2 Διανύσματα (μία πρώτη γνωριμία)

Ένας πίνακας διαστάσεων $1 \times m$, που αποτελείται δηλαδή από μία μόνο γραμμή, λέγεται **πίνακας-γραμμή**. Ένας πίνακας διαστάσεων $n \times 1$, που αποτελείται δηλαδή από μία μόνο στήλη, λέγεται **πίνακας-στήλη**. Στα επόμενα, τους πίνακες-στήλες θα τους λέμε **διανύσματα**. Σε επόμενη ενότητα που θα συζητήσουμε την γεωμετρική ερμηνεία τους θα τα συνδέσουμε με τα «βελάκια» που είχατε μάθει στο σχολείο. Εδώ θα πούμε μερικά βασικά που θα διευκολύνουν την παρουσίαση της επόμενης ενότητας.

Στα ακόλουθα παρ' όλο που τα διανύσματα είναι πίνακες (πίνακες με μία μόνο στήλη) θα χρησιμοποιούμε «ειδικό» συμβολισμό γι' αυτά. Αντί για κεφαλαίο γράμμα θα χρησιμοποιούμε μικρό (πεζό) και θα του βάζουμε από κάτω μία κατσαρή γραμμή. Αν χρειάζεται, θα γράφουμε και τις διαστάσεις του (μην ξεχνάτε ότι τα διανύσματα είναι πίνακες). Π.χ.

$$\underset{\sim}{x},\ \underset{\sim}{y},\ \underset{n\times 1}{\underset{\sim}{z}},\ \underset{\sim}{v}_1,\ \underset{\sim}{v}_2,\ \underset{\sim}{v}_3,\ \underset{k\times 1}{\underset{\sim}{w}_1},\ \underset{k\times 1}{\underset{\sim}{w}_2}$$

Παρ' όλο που τα στοιχεία ενός διανύσματος είναι στοιχεία ενός πίνακα, θα χρησιμοποιούμε γι' αυτά μονούς δείκτες μια και δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε δείκτη για την μία και μοναδική στήλη. Έτσι θα γράφουμε

$$\underset{4\times 1}{\underset{\sim}{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \underset{n\times 1}{\underset{\sim}{y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \underset{m\times 1}{\underset{\sim}{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \qquad \text{κλπ.}$$

Αν το διάνυσμα έχει δείκτη τότε συνήθως θα τον βάζουμε δεύτερο στη σειρά:

$$\underset{3\times 1}{\underset{\sim}{v}_1} = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{pmatrix}, \quad \underset{3\times 1}{\underset{\sim}{v}_2} = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{pmatrix}, \quad \underset{2\times 1}{\underset{\sim}{w}_5} = \begin{pmatrix} w_{15} \\ w_{25} \end{pmatrix}$$

Το πλήθος των στοιχείων ενός διανύσματος (δηλαδή το πλήθος των γραμμών του πίνακα-στήλη) θα το λέμε *διάσταση* του διανύσματος. Έτσι, από τα διανύσματα των παραδειγμάτων το $\underset{4\times 1}{\underset{\sim}{x}}$ είναι τετραδιάστατο, το $\underset{n\times 1}{\underset{\sim}{y}}$ είναι n-διάστατο (διαβάζεται «εν διάστατο»), το $\underset{m\times 1}{\underset{\sim}{v}}$ είναι m-διάστατο («εμ διάστατο»), τα $\underset{3\times 1}{\underset{\sim}{v}_1}$ και $\underset{3\times 1}{\underset{\sim}{v}_2}$ είναι τριδιάστατα, και το $\underset{2\times 1}{\underset{\sim}{w}_5}$ είναι διδιάστατο. Επομένως, γενικά, ένας πίνακας διαστάσεων $n \times 1$ (που έχει n γραμμές και μία στήλη) είναι ένα n-διάστατο διάνυσμα.

Τα μηδενικά διανύσματα θα τα συμβολίζουμε με $\underset{\sim}{0}$ (αντί για O):

$$\underset{2\times 1}{\underset{\sim}{0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underset{3\times 1}{\underset{\sim}{0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underset{n\times 1}{\underset{\sim}{0}} = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} n \text{ μηδενικά}$$

Προφανώς, αν αναστρέψουμε έναν πίνακα-στήλη θα πάρουμε έναν πίνακα-γραμμή:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

Άρα οι πίνακες-γραμμές είναι ανεστραμμένα διανύσματα. Συχνά, τα στοιχεία ενός ανεστραμμένου διανύσματος τα χωρίζουμε με κόμματα:

$$(2,1), \quad (-1,0,-2), \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Επίσης για οικονομία χώρου πολλές φορές γράφουμε τα διανύσματα σε μία γραμμή και βάζουμε έναν τόνο για να δηλώσουμε ότι πρέπει να αναστραφούν, π.χ.

$$\underset{4\times 1}{\underset{\sim}{x}} = (x_1, x_2, x_3, x_4)', \quad \underset{n\times 1}{\underset{\sim}{y}} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)', \quad \underset{m\times 1}{\underset{\sim}{v}} = (v_1, v_2, \ldots, v_m)' \qquad \text{κλπ.}$$

Αυτά τα τρία είναι ακριβώς τα διανύσματα που είδαμε στο πρώτο παράδειγμα. Σημειώστε ότι δεν θα γράφουμε ποτέ $\underset{\sim}{a} = (2, -1, 0)$ μια και έχουμε ορίσει τα διανύσματα ως πίνακες-στήλες και το $(2, -1, 0)$ είναι γραμμή. Θα γράφουμε είτε $\underset{\sim}{a} = (2, -1, 0)'$ είτε $\underset{\sim}{a}' = (2, -1, 0)$.

Το **εσωτερικό γινόμενο** δύο διανυσμάτων $\underset{n\times 1}{\underset{\sim}{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$, $\underset{n\times 1}{\underset{\sim}{y}} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ (ίδιας διάστασης!) που συχνά συμβολίζεται με $\langle \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \rangle$, ορίζεται ως

$$\langle \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι για τον υπολογισμό του εσωτερικού γινομένου πολλαπλασιάζουμε τα αντίστοιχα στοιχεία των δύο διανυσμάτων και παίρνουμε το άθροισμα των γινομένων. Για παράδειγμα,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = (2)(1) + (-1)(3) = 2 - 3 = -1$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = (0)(1) + (-2)(1) + (2)(4) = 0 - 2 + 8 = 6$$

Παρατηρήστε ότι στο εσωτερικό γινόμενο δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία βάζουμε τα δύο διανύσματα:

$$\langle \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_n x_n = \langle \underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{x} \rangle$$

Συχνά είναι αρκετά βολικό να θεωρούμε έναν πίνακα $n \times m$ είτε ως m n-διάστατα διανύσματα τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο είτε n m-διάστατατα ανεστραμμένα διανύσματα τοποθετημένα το ένα κάτω από το άλλο. Για παράδειγμα, ο πίνακας $\underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από τα διανύσματα, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$(τις τρεις στήλες του) ή από τα ανάστροφα διανύσματα $(-2, 1, 0), (1, 1, 3)$ (τις δύο γραμμές του). Γενικά, για έναν πίνακα $\underset{n\times m}{A}$ μπορούμε να γράψουμε

$$\underset{n\times m}{A} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_1 & \underset{\sim}{a}_2 & \cdots & \underset{\sim}{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{b}_1' \\ \underset{\sim}{b}_2' \\ \vdots \\ \underset{\sim}{b}_n' \end{pmatrix}$$

όπου $\underset{\sim}{a}_1, \underset{\sim}{a}_2, \ldots, \underset{\sim}{a}_m$ οι m n-διάστατες στήλες του και $\underset{\sim}{b}_1', \underset{\sim}{b}_2', \ldots, \underset{\sim}{b}_n'$ οι n m-διάστατες γραμμές του. (Αναγκαστικά τις γραμμές τις συμβόλισα με b αφού το a το χρησιμοποίησα για τις στήλες.) Για τον ανάστροφο αυτού του πίνακα ισχύει φυσικά

$$\underset{m\times n}{A'} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_1' \\ \underset{\sim}{a}_2' \\ \vdots \\ \underset{\sim}{a}_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{b}_1 & \underset{\sim}{b}_2 & \cdots & \underset{\sim}{b}_n \end{pmatrix}$$

μια που ο ανάστροφος του A έχει γραμμές τις στήλες του A και στήλες τις γραμμές του A.

3 Πράξεις με πίνακες

Οι βασικές πράξεις στις οποίες εμπλέκονται πίνακες είναι τρεις: Ο πολλαπλασιασμός πίνακα με αριθμό, η πρόσθεση πινάκων, και ο πολλαπλασιασμός πινάκων. Κάθε μία έχει τους δικούς της κανόνες και ιδιότητες. Προσέξτε ιδιαίτερα τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

3.1 Πρόσθεση πινάκων

Δύο πίνακες μπορούν να προστεθούν *αν και μόνον αν έχουν τις ίδιες διαστάσεις*. Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης των πινάκων $\underset{n\times m}{A} = (a_{ij})$ και $\underset{n\times m}{B} = (b_{ij})$ (προσέξτε ότι έχουν το ίδιο πλήθος γραμμών, n, και το ίδιο πλήθος στηλών, m) είναι ένας πίνακας $\underset{n\times m}{C} = (c_{ij})$ (με τα ίδια πλήθη γραμμών και στηλών όπως οι A, B) με

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Για παράδειγμα,

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & -3+2 & 0+(-3) \\ -2+1 & -2+2 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Διανύσματα (πίνακες-στήλες) μπορούν να προστεθούν μόνο αν έχουν την ίδια διάσταση: Για παράδειγμα, αν $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$, $\underset{\sim}{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$, $\underset{\sim}{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_m)'$ τότε έχει νόημα η πρόσθεση $\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{y}$ αφού και τα δύο είναι n-διάστατα, αλλά *όχι* η $\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{z}$ μια που το $\underset{\sim}{z}$ είναι m-διάστατο. Ισχύει δε

$$\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Η πράξη έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Προσεταιριστική

  Αν $\underset{n\times m}{A} = (a_{ij})$, $\underset{n\times m}{B} = (b_{ij})$, $\underset{n\times m}{C} = (c_{ij})$ είναι πίνακες (ίδιων διαστάσεων!) τότε

  $$A + (B + C) = (A + B) + C$$

  αφού από τις ιδιότητες της «κανονικής» πρόσθεσης ισχύει όπως ξέρουμε

  $$a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}.$$

  (Εδώ και σε ό,τι ακολουθεί αποδεικνύουμε την ιδιότητα συγκρίνοντας το γενικό στοιχείο του πρώτου πίνακα με το γενικό στοιχείο του δεύτερου: Αν αυτά είναι ίσα τότε και οι πίνακες είναι ίσοι.)

  Επειδή τα $A + (B + C)$ και $(A + B) + C$ είναι ίσα, συνήθως γράφουμε $A + B + C$.

- <u>Αντιμεταθετική</u>
  Αν $\underset{n\times m}{A} = (a_{ij})$, $\underset{n\times m}{B} = (b_{ij})$ είναι δύο πίνακες τότε
$$A + B = B + A$$
  αφού
$$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}.$$

Οι δύο αυτές ιδιότητες μας λένε ότι αν έχουμε να προσθέσουμε δύο η περισσότερους πίνακες τότε δεν παίζει ρόλο ούτε η σειρά με την οποία θα τους προσθέσουμε ούτε από ποιους θα αρχίσουμε τις προσθέσεις. Για παράδειγμα, αν οι πίνακες A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 έχουν ίδιες διαστάσεις τότε για το άθροισμά τους $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$ ισχύει

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 &= (A_1 + A_2) + (A_3 + A_4 + A_5) = (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + A_5 \\ &= (A_3 + A_5) + (A_2 + A_1 + A_4) = A_4 + (A_3 + A_1) + (A_5 + A_2) \quad \text{κλπ.} \end{aligned}$$

Αν αναρωτιέστε για την αφαίρεση πινάκων θα αναφερθούμε σε αυτήν σε λίγο αφού πρώτα δούμε την επόμενη ενότητα.

Είναι εύκολο να δείτε (μόνοι σας) ότι ο ανάστροφος αθροίσματος πινάκων είναι το άθροισμα των αναστρόφων τους:
$$(A + B)' = A' + B'$$

3.2 Πολλαπλασιασμός πίνακα με αριθμό

Έστω $\underset{n\times m}{A} = (a_{ij})$ ένας πίνακας και $\lambda \in \mathbb{R}$ ένας αριθμός. (Με $\mathbb{R}$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Είναι ο κλασσικός συμβολισμός του.) Το γινόμενο $\lambda \underset{n\times m}{A}$ είναι ένας πίνακας $\underset{n\times m}{B} = (b_{ij})$ με
$$b_{ij} = \lambda a_{ij}.$$
Δηλαδή, το γινόμενο λA μας δίνει έναν πίνακα που έχει τις ίδιες διαστάσεις με τον A και κάθε στοιχείο του είναι το αντίστοιχο στοιχείο του A πολλαπλασιασμένο επί λ.

Για παράδειγμα,

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{pmatrix},$$

$$(-2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)(2) & (-2)(0) \\ (-2)(0) & (-2)(1) \\ (-2)(-1) & (-2)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n)' = (\mu x_1, \mu x_2, \ldots, \mu x_n)'$$

$$3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3)(2) \\ (3)(0) \\ (3)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Η πράξη έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Προσεταιριστική
  Αν $\underset{n\times m}{A} = (a_{ij})$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τότε
  $$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$$
  αφού από τις ιδιότητες του «κανονικού» πολλαπλασιασμού ισχύει όπως ξέρουμε
  $$\lambda(\mu a_{ij}) = (\lambda\mu)a_{ij}.$$
  Το αποτέλεσμα συνήθως το γράφουμε $\lambda\mu A$ (χωρίς παρενθέσεις).

- Αντιμεταθετική
  Αν $\underset{n\times m}{A} = (a_{ij})$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τότε
  $$\lambda A = A\lambda$$
  αφού
  $$\lambda a_{ij} = a_{ij}\lambda$$
  Συνηθίζουμε πάντως να γράφουμε τον αριθμό πριν από τον πίνακα: λA. Επίσης,
  $$(\lambda\mu)A = (\mu\lambda)A$$
  αφού
  $$(\lambda\mu)a_{ij} = (\mu\lambda)a_{ij}.$$

- Επιμεριστική
  Αν $\underset{n\times m}{A} = (a_{ij})$, $\underset{n\times m}{B}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τότε
  $$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$
  αφού
  $$(\lambda + \mu)a_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu a_{ij}$$
  και επίσης
  $$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$
  αφού
  $$\lambda(a_{ij} + b_{ij}) = \lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}.$$
  Η πρώτη ιδιότητα μας λέει ότι στο άθροισμα $\lambda A + \mu A$ μπορούμε «να βγάλουμε κοινό παράγοντα» τον πίνακα A ενώ η δεύτερη μας λέει ότι στο άθροισμα $\lambda A + \lambda B$ μπορούμε «να βγάλουμε κοινό παράγοντα» τον αριθμό λ.

  (Προσοχή! Όπως ξέρουμε, για αριθμούς a, b, λ, μ δεν ισχύει, γενικά, $\lambda a+\mu b = (\lambda+\mu)(a+b)$. Επομένως *δεν* ισχύει, γενικά, $\lambda A + \mu B = (\lambda + \mu)(A + B)$.)

Όταν πολλαπλασιάζουμε έναν πίνακα με το μηδέν παίρνουμε έναν μηδενικό πίνακα ίδιων διαστάσεων:

$$0\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 0\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Γενικά,

$$0 \underset{n\times m}{A} = \underset{n\times m}{\mathrm{O}}, \quad 0 \underset{k\times 1}{\underset{\sim}{x}} = \underset{k\times 1}{\underset{\sim}{0}}$$

Ο αντίθετος ενός πίνακα $\underset{n\times m}{A}$ είναι ο πίνακας $(-1)A$ για τον οποίον γράφουμε απλώς $-A$. Η αφαίρεση $A - B$ έχει νόημα μόνο αν οι πίνακες $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ έχουν ίδιες διαστάσεις και είναι το άθροισμα των A και $-B$: το ij στοιχείο του $A - B$ είναι το $a_{ij} - b_{ij}$. Π.χ.,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & 1-1 & -2-4 \\ -3-(-2) & 4-1 & 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι για πίνακες $\underset{n\times m}{A} = (a_{ij}), \underset{n\times m}{B} = (b_{ij})$ ισχύουν τα ακόλουθα:

$$A - A = \underset{n\times m}{\mathrm{O}} \quad (\text{αφού } a_{ij} - a_{ij} = 0)$$

$$A + \mathrm{O} = \mathrm{O} + A = A \quad (\text{αφού } a_{ij} + 0 = 0 + a_{ij} = a_{ij})$$

$$A + B = \underset{n\times m}{\mathrm{O}} \Leftrightarrow A = -B \Leftrightarrow B = -A \quad (\text{αφού } a_{ij} + b_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = -b_{ij} \Leftrightarrow b_{ij} = -a_{ij})$$

3.3 Πολλαπλασιασμός μεταξύ πινάκων

Αυτή είναι η πιο «δύσκολη» πράξη γιατί σε αντίθεση με τις προηγούμενες δύο δεν φαίνεται εκ πρώτης όψεως η λογική της. *Δύο πίνακες A, B μπορούν να πολλαπλασιαστούν εφ' όσον το πλήθος στηλών του πρώτου συμπίπτει με το πλήθος των γραμμών του δεύτερου.* Για παράδειγμα, τα ακόλουθα γινόμενα πινάκων έχουν νόημα:

$$\underset{2\times 5}{A}\underset{5\times 3}{B}, \quad \underset{3\times 1}{C}\underset{1\times 7}{D}, \quad \underset{3\times 2}{E}\underset{2\times 3}{F}, \quad \underset{n\times m}{G}\underset{m\times k}{H}$$

Μοναδική εξαίρεση στον παραπάνω κανόνα αποτελεί η περίπτωση που ένας από τους δύο πίνακες έχει διαστάσεις 1×1 που σημαίνει ότι είναι ένας αριθμός. Σε αυτήν την περίπτωση η πράξη είναι ουσιαστικά πολλαπλασιασμός πίνακα με αριθμό.

Το αποτέλεσμα του γινομένου AB των πινάκων $\underset{n\times m}{A} = (a_{ij})$ και $\underset{m\times k}{B} = (b_{ij})$ είναι ένας πίνακας $\underset{n\times k}{C} = (c_{ij})$ που, όπως βλέπουμε από κάτω του, το πλήθος των γραμμών του ισούται με το πλήθος των γραμμών του πρώτου πίνακα και το πλήθος των στηλών του ισούται με το πλήθος των στηλών του δεύτερου πίνακα.

> *Το στοιχείο ij του γινομένου AB ισούται με το εσωτερικό γινόμενο της γραμμής i του A και της στήλης j του B.*

Ξεχάστε όλα τα υπόλοιπα στοιχεία των δύο πινάκων και επικεντρωθείτε στην γραμμή i του A και στην στήλη j του B:

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dots & b_{1j} & \dots \\ \dots & b_{2j} & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & b_{kj} & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & b_{mj} & \dots \end{pmatrix}$$

Βλέπουμε δύο m-διάστατα διανύσματα: Το πρώτο είναι η γραμμή i του A (ένα ανεστραμμένο διάνυσμα) και το δεύτερο είναι η στήλη j του B. Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι το στοιχείο ij του πίνακα $C = AB$:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$$

Στο άθροισμα των $a_{ik}b_{kj}$ η μεταβλητή άθροισης k ξεκινάει από το 1 και καταλήγει στο m.

Ας δούμε αναλυτικά ένα παράδειγμα: Έστω

$$\underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underset{3\times 3}{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ο A έχει τρεις στήλες και ο B τρεις γραμμές, άρα μπορεί να γίνει ο πολλαπλασιασμός AB: Το αποτέλεσμα της πράξης είναι ένας πίνακας 2×3 μια και ο A έχει δύο γραμμές και ο B τρεις στήλες. Τα στοιχεία του τα βρίσκουμε ως εξής:

Για το στοιχείο 11 του AB παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο της γραμμής 1 του A και της στήλης 1 του B:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ \square & \square & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \square & \square \\ 1 & \square & \square \\ -3 & \square & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2)(-1) + (-1)(1) + (4)(-3) & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

Για το στοιχείο 12 του AB παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο της γραμμής 1 του A και της στήλης 2 του B:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ \square & \square & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square & 2 & \square \\ \square & 1 & \square \\ \square & -1 & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & (2)(2) + (-1)(1) + (4)(-1) & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & -1 & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

Για το στοιχείο 13 του AB παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο της γραμμής 1 του A και της στήλης 3 του B:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ \square & \square & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square & \square & 0 \\ \square & \square & -2 \\ \square & \square & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square & (2)(0) + (-1)(-2) + (4)(1) \\ \square & \square & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square & 6 \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

Για το στοιχείο 21 του AB παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο της γραμμής 2 του A και της στήλης 1 του B:

$$\begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \square & \square \\ 1 & \square & \square \\ -3 & \square & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ (0)(-1) + (1)(1) + (3)(-3) & \square & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ -8 & \square & \square \end{pmatrix}$$

Για το στοιχείο 22 του AB παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο της γραμμής 2 του A και της στήλης 2 του B:

$$\begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square & 2 & \square \\ \square & 1 & \square \\ \square & -1 & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & (0)(2) + (1)(1) + (3)(-1) & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & -2 & \square \end{pmatrix}$$

Για το στοιχείο 23 του AB παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο της γραμμής 2 του A και της στήλης 3 του B:

$$\begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square & \square & 0 \\ \square & \square & -2 \\ \square & \square & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & (0)(0)+(1)(-2)+(3)(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -1 & 6 \\ -8 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Να επαληθεύσετε μόνοι σας ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2$$

Τώρα που είδαμε πώς ορίζεται ο πολλαπλασιασμός πινάκων μπορούμε να καταλάβουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\underset{n\times 1}{\underset{\sim}{x}}$, $\underset{n\times 1}{\underset{\sim}{y}}$ δεν είναι παρά το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού

$$\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

Γι' αυτόν το λόγο στο εξής θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{y}$ για το εσωτερικό γινόμενο των $\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}$ αντί του $\langle \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \rangle$. Ισοδύναμα, μπορούμε να το γράφουμε και $\underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{x}$ μια και $y_1x_1 + \cdots + y_nx_n = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$.

Επομένως: Αν $\underset{n\times m}{A} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_1' \\ \underset{\sim}{a}_2' \\ \vdots \\ \underset{\sim}{a}_n' \end{pmatrix}$ και $\underset{m\times k}{B} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{b}_1 & \underset{\sim}{b}_2 & \cdots & \underset{\sim}{b}_m \end{pmatrix}$ τότε το στοιχείο ij του AB είναι το εσωτερικό γινόμενο $\underset{\sim}{a}_i'\underset{\sim}{b}_j$.

Ας τονίσουμε επίσης το γεγονός ότι το γινόμενο πίνακα επί διάνυσμα είναι πάντα διάνυσμα γιατί αφού τα διανύσματα είναι πίνακες που έχουν μία μόνο στήλη το γινόμενο θα έχει επίσης μία μόνο στήλη:

$$\underset{n\times m}{A}\,\underset{m\times 1}{\underset{\sim}{u}} = \underset{n\times 1}{\underset{\sim}{v}}$$

Ο ανάστροφος γινομένου πινάκων είναι το γινόμενο των αναστρόφων με αντίστροφη σειρά:

$$(AB)' = B'A'$$

Γιατί ισχύει αυτό; Έστω $\underset{\sim}{a}_1', \underset{\sim}{a}_2', \ldots, \underset{\sim}{a}_n'$ οι γραμμές του A και $\underset{\sim}{b}_1, \underset{\sim}{b}_2, \ldots, \underset{\sim}{b}_m$ οι στήλες του B, όπως παραπάνω. Τότε το στοιχείο ij του AB είναι $\underset{\sim}{a}_i'\underset{\sim}{b}_j$ και το στοιχείο ij του $(AB)'$ είναι $\underset{\sim}{a}_j'\underset{\sim}{b}_i$ (δηλαδή το στοιχείο ji του AB). Από την άλλη πλευρά, ο B' έχει γραμμές $\underset{\sim}{b}'_1, \underset{\sim}{b}'_2, \ldots, \underset{\sim}{b}'_m$ και ο A' έχει στήλες $\underset{\sim}{a}_1, \underset{\sim}{a}_2, \ldots, \underset{\sim}{a}_n$. Επομένως, το ij στοιχείο του $B'A'$ είναι $\underset{\sim}{b}'_i \underset{\sim}{a}_j$ που είναι ίσο με το $\underset{\sim}{a}'_j \underset{\sim}{b}_i$.

Έστω $\underset{n\times n}{A}$ πίνακας (με το ίδιο πλήθος γραμμών και στηλών, δηλαδή τετραγωνικός) και k φυσικός ακέραιος. Ως k δύναμη του A ορίζουμε το γινόμενο του A με τον εαυτό του k φορές (όπως και στους αριθμούς):

$$A^1 = A, \quad A^2 = AA, \quad A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k \text{ φορές}}$$

Προσέξτε ότι είναι σημαντικό να είναι τετραγωνικός ο πίνακας για να ορίσουμε δυνάμεις του αφού αν το πλήθος στηλών του ήταν διαφορετικό από το πλήθος γραμμών του δεν θα μπορούσαμε να τον πολλαπλασιάσουμε με τον εαυτό του.

Όπως και οι προηγούμενες πράξεις, έτσι και ο πολλαπλασιασμός πινάκων έχει μερικές ιδιότητες που θυμίζουν τις ιδιότητες των πράξεων μεταξύ αριθμών. Όμως κάποιες από αυτές όπως η αντιμεταθετική ιδιότητα και το ότι αν το γινόμενο ισούται με μηδέν τότε ο ένας από τους δύο παράγοντες είναι μηδέν δεν ισχύουν, γενικά. Θα ξεκινήσουμε από αυτές.

- ~~Αντιμεταθετική ιδιότητα~~

  Ακόμη κι αν έχουν νόημα τα γινόμενα AB και BA, γενικά έχουμε

  $$AB \neq BA$$

  Κατ' αρχάς, για να έχουν νόημα τα δύο γινόμενα θα πρέπει ο A να είναι διαστάσεων $n \times m$ και ο B να είναι διαστάσεων $m \times n$. Προφανώς, αν $n \neq m$, οι πίνακες AB και BA δεν μπορεί να είναι ίσοι μια και ο πρώτος είναι $n \times n$ και ο δεύτερος είναι $m \times m$. Υποθέστε τώρα ότι και ο A και ο B είναι $n \times n$ (δηλαδή τετραγωνικοί). Θα δείξουμε ότι, γενικά, δεν ισχύει η ιδιότητα μέσω ενός αντιπαραδείγματος.

  Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Το στοιχείο 11 του AB είναι $(2)(1) + (-1)(-1) = 2 + 1 = 3$ ενώ του BA είναι $(1)(2) + (0)(1) = 2 + 0 = 2$. Άρα οι δύο πίνακες δεν είναι ίσοι.

- ~~Γινόμενο ίσο με μηδέν συνεπάγεται ότι τουλάχιστον ένας παράγοντας είναι ίσος με μηδέν~~

  Έστω $\underset{n\times m}{A}, \underset{m\times k}{B}$ δύο πίνακες για τους οποίους ισχύει $AB = \underset{n\times k}{\mathrm{O}}$. Αυτό δεν συνεπάγεται απαραίτητα ότι $A = \underset{n\times m}{\mathrm{O}}$ ή $B = \underset{m\times k}{\mathrm{O}}$. Για παράδειγμα,

  $$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Φυσικά, αν $A = \mathrm{O}$ ή $B = \mathrm{O}$ τότε $AB = \mathrm{O}$. Αυτό που είπαμε εδώ σημαίνει ότι δεν ισχύει το αντίστροφο.

Ας δούμε τώρα ιδιότητες που ισχύουν.

- Προσεταιριστική

  Αν $\underset{n\times m}{A} = (a_{ij})$, $\underset{m\times \ell}{B} = (b_{ij})$, $\underset{\ell\times k}{C} = (c_{ij})$ είναι πίνακες τότε

$$A(BC) = (AB)C$$

(Προσέξτε ότι το πλήθος στηλών του A ισούται με το πλήθος γραμμών του B έτσι ώστε να μπορεί να γίνει ο πολλαπλασιασμός AB, και το πλήθος στηλών του B ισούται με το πλήθος γραμμών του C έτσι ώστε να μπορεί να γίνει ο πολλαπλασιασμός BC.)

Λόγω της παραπάνω ιδιότητας το γινόμενο των τριών πινάκων το γράφουμε απλώς ABC. Είναι ένας πίνακας διαστάσεων $n \times k$: οι γραμμές του είναι όσες και οι γραμμές του A και οι στήλες του είναι όσες και οι στήλες του C.

Η ιδιότητα ισχύει γιατί το στοιχείο ij του πίνακα $A(BC)$ και το στοιχείο ij του πίνακα $(AB)C$ είναι ίσα με $\sum\limits_{s=1}^{m}\sum\limits_{t=1}^{\ell} a_{is}b_{st}c_{tj}$. Θα τα βρούμε και τα δύο εξηγώντας με κάθε λεπτομέρεια όλα τα βήματα καθώς και τι σημαίνει αυτό το διπλό άθροισμα.

Παρατηρήστε πρώτα ότι το στοιχείο ij του πίνακα $\underset{m\times k}{BC}$ προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο της γραμμής i του B και της στήλης j του C,

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{it} & \dots & b_{i\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & c_{1j} & \dots \\ \dots & c_{2j} & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & c_{tj} & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & c_{\ell j} & \dots \end{pmatrix} \quad \text{που είναι} \quad \sum_{t=1}^{\ell} b_{it}c_{tj},$$

ενώ το στοιχείο ij του πίνακα $A(BC)$ είναι το εσωτερικό γινόμενο της γραμμής i του A και της στήλης j του BC,

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{is} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & \sum_{t=1}^{\ell} b_{1t}c_{tj} & \dots \\ \dots & \sum_{t=1}^{\ell} b_{2t}c_{tj} & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & \sum_{t=1}^{\ell} b_{st}c_{tj} & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & \sum_{t=1}^{\ell} b_{mt}c_{tj} & \dots \end{pmatrix} \quad \text{που είναι} \quad \sum_{s=1}^{m} a_{is}\Big(\sum_{t=1}^{\ell} b_{st}c_{tj}\Big)$$

Ας δούμε τώρα ποιο είναι το στοιχείο ij του $(AB)C$. Κατ' αρχάς το στοιχείο ij του $\underset{n\times \ell}{AB}$ είναι το εσωτερικό γινόμενο της γραμμής i του A και της στήλης j του B,

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{is} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & b_{1j} & \dots \\ \dots & b_{2j} & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & b_{sj} & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & b_{s\ell} & \dots \end{pmatrix} \quad \text{που είναι} \quad \sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{sj}$$

ενώ το στοιχείο ij του $(AB)C$ είναι το εσωτερικό γινόμενο της γραμμής i του AB και της στήλης j του C

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{s=1}^{m} a_{is}b_{s1} & \sum\limits_{s=1}^{m} a_{is}b_{s2} & \dots & \sum\limits_{s=1}^{m} a_{is}b_{st} & \dots & \sum\limits_{s=1}^{m} a_{is}b_{s\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & c_{1j} & \dots \\ \dots & c_{2j} & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & c_{tj} & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & c_{t\ell} & \dots \end{pmatrix}$$

που είναι $\displaystyle\sum_{t=1}^{\ell}\Big(\sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{st}\Big)c_{t\ell}$

Επομένως, το στοιχείο ij του $A(BC)$ είναι $\sum\limits_{s=1}^{m} a_{is}\big(\sum\limits_{t=1}^{\ell} b_{st}c_{tj}\big)$ ενώ το στοιχείο ij του $(AB)C$ είναι $\sum\limits_{t=1}^{\ell}\big(\sum\limits_{s=1}^{m} a_{is}b_{st}\big)c_{tj}$. Μας μένει να διαπιστώσουμε ότι αυτά τα δύο είναι ίσα. Βλέπουμε ότι και στα δύο υπάρχουν δύο αθροίσματα, ένα ως προς s, από 1 έως m, και ένα ως προς t, από 1 έως ℓ. Το πρώτο από αυτά είναι

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{m} a_{is}\Big(\sum_{t=1}^{\ell} b_{st}c_{tj}\Big) &= \sum_{s=1}^{m} a_{is}(b_{s1}c_{1j} + b_{s2}c_{2j} + \cdots + b_{s\ell}c_{\ell j}) \\ &= \sum_{s=1}^{m}(a_{is}b_{s1}c_{1j} + a_{is}b_{s2}c_{2j} + \cdots + a_{is}b_{s\ell}c_{\ell j}) = \sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{\ell} a_{is}b_{st}c_{tj}\end{aligned}$$

ενώ το δεύτερο

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{\ell}\Big(\sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{st}\Big)c_{tj} &= \sum_{t=1}^{\ell}(a_{i1}b_{1t} + a_{i2}b_{2t} + \cdots + a_{im}b_{mt})c_{tj} \\ &= \sum_{t=1}^{\ell}(a_{i1}b_{1t}c_{tj} + a_{i2}b_{2t}c_{tj} + \cdots + a_{im}b_{mt}c_{tj}) = \sum_{t=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{st}c_{tj}\end{aligned}$$

Μένει να δείξουμε ότι $\sum\limits_{s=1}^{m}\sum\limits_{t=1}^{\ell} a_{is}b_{st}c_{tj} = \sum\limits_{t=1}^{\ell}\sum\limits_{s=1}^{m} a_{is}b_{st}c_{tj}$. Επειδή και στις δύο περιπτώσεις αυτά που αθροίζουμε είναι τα $a_{is}b_{st}c_{tj}$ ως προς s και t και ως προς t και s, αντίστοιχα, αρκεί να καταλάβουμε πότε μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά των αθροίσεων όταν έχουμε διπλά αθροίσματα.

Διπλά αθροίσματα

Η παράσταση

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}$$

δηλώνει άθροιση των ποσοτήτων x_{ij} για όλες τις τιμές i από 1 μέχρι n και όλες τις τιμές j από 1 μέχρι m. Για να υπολογίσουμε αυτό το διπλό άθροισμα κάνουμε ό,τι και στο απλό άθροισμα αλλά δύο φορές: Παίρνουμε την πρώτη τιμή για το i, δηλαδή θέτουμε $i = 1$. Μπαίνουμε μέσα στο άθροισμα και συναντάμε $\sum\limits_{j=1}^{m} x_{1j}$ (το i είπαμε ότι τέθηκε ίσο με 1). Υπολογίζουμε το τελευταίο άθροισμα όπως ξέρουμε: $x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1m}$. Βγαίνουμε έξω και παίρνουμε την επόμενη τιμή i, δηλαδή θέτουμε $i = 2$. Μπαίνουμε μέσα στο άθροισμα και κάνουμε την πράξη $\sum\limits_{j=1}^{m} x_{2j}$ (το i είναι τώρα 2) και παίρνουμε $x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2m}$. Αυτό το προσθέτουμε στο προηγούμενο άθροισμα (που το i ήταν 1). Βγαίνουμε έξω και παίρνουμε την επόμενη τιμή για το i και συνεχίζουμε την διαδικασία μέχρι να φτάσουμε στην τελευταία τιμή του, δηλαδή το n. Έτσι βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = {} & x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1m} + \\ & x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2m} + \\ & \vdots \\ & x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nm}\end{aligned}$$

Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} w_{ij} &= w_{11} + w_{12} + w_{21} + w_{22} + w_{31} + w_{32} \\ \sum_{k=2}^{3}\sum_{\ell=1}^{5} y_{k\ell} &= y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{24} + y_{25} + y_{31} + y_{32} + y_{33} + y_{34} + y_{35}\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι στο παραπάνω διπλό άθροισμα των x_{ij} είναι σαν να αθροίζουμε όλα τα στοιχεία ενός πίνακα $n \times m$ κάνοντας τις προσθέσεις γραμμή-γραμμή. Προφανώς το ίδιο αποτέλεσμα θα προέκυπτε κι αν αθροίζαμε στήλη-στήλη:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = {} & x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{n1} + \\ & x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{n2} + \\ & \vdots \\ & x_{1m} + x_{2m} + \cdots + x_{nm}\end{aligned}$$

Καταλαβαίνετε λοιπόν ότι η σειρά των δύο αθροίσεων, αυτής ως προς i και αυτής ως προς j, δεν παίζει ρόλο στο αποτέλεσμα:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$$

Επιτρέπεται πάντοτε αυτό; Ναι, με την προϋπόθεση ότι τα όρια της εσωτερικής άθροισης δεν εξαρτώνται από την μεταβλητή της εξωτερικής. Για παράδειγμα, έστω $m_1 = 2, m_2 = 3, m_3 = 1$. Στο άθροισμα

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} \qquad (\text{που κάνει } x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31})$$

δεν επιτρέπεται η αλλαγή της σειράς των δύο αθροίσεων μια και τα όρια του εσωτερικού αθροίσματος εξαρτώνται από την μεταβλητή της εξωτερικής άθροισης i.

Ας επιστρέψουμε τώρα στην απόδειξη της προσεταιριστικής ιδιότητας, στο σημείο που θέλαμε να καταλάβουμε γιατί μπορούμε να αλλάξουμε την σειρά των αθροίσεων ως προς i και ως προς j ώστε να πειστούμε ότι

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{\ell} a_{is}b_{st}c_{tj} = \sum_{t=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{st}c_{tj}$$

Νομίζω ότι η συζήτηση για το διπλό άθροισμα που έγινε προηγουμένως θα πρέπει να μας έχει πείσει.

- Επιμεριστική
  Έστω πίνακες $\underset{n\times m}{A} = (a_{ij})$, $\underset{n\times m}{B} = (b_{ij})$, $\underset{m\times k}{C} = (c_{ij})$, $\underset{m\times k}{D} = (d_{ij})$. Τότε,
  $$(A+B)C = AC + BC$$
  και
  $$A(C+D) = AC + AD$$
  Η πρώτη ισότητα μας λέει ότι μπορούμε να βγάλουμε «κοινό παράγοντα» έναν πίνακα από δεξιά ενώ η δεύτερη μας λέει ότι μπορούμε να βγάλουμε «κοινό παράγοντα» έναν πίνακα από αριστερά. (Αν κάποιος νομίζει ότι οι δύο ισότητες μας λένε το ίδιο πράγμα ας το ξανασκεφτεί: στον πολλαπλασιασμό πινάκων δεν ισχύει, γενικά, η αντιμεταθετική ιδιότητα επομένως έχει διαφορά το να πολλαπλασιάζουμε από δεξιά με το να πολλαπλασιάζουμε από αριστερά.)

  Ας αποδείξουμε ότι $(A+B)C = AC+BC$. Το στοιχείο ij του $A+B$ είναι $a_{ij}+b_{ij}$, επομένως το στοιχείο ij του $(A+B)C$ είναι $\sum_{s=1}^{m}(a_{is}+b_{is})c_{sj}$. Επίσης, το στοιχείο ij του AC είναι $\sum_{s=1}^{m} a_{is}c_{sj}$ ενώ του BC είναι $\sum_{s=1}^{m} b_{is}c_{sj}$. Επομένως, το στοιχείο ij του $AC+BC$ είναι
  $$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{m} a_{is}c_{sj} + \sum_{s=1}^{m} b_{is}c_{sj} &= (a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \cdots + a_{im}c_{mj}) + (b_{i1}c_{1j} + b_{i2}c_{2j} + \cdots + b_{im}c_{sm}) \\ &= (a_{i1}+b_{i1})c_{1j} + (a_{i2}+b_{i2})c_{2j} + \cdots + (a_{im}+b_{im})c_{mj} \\ &= \sum_{s=1}^{m}(a_{is}+b_{is})c_{sj}\end{aligned}$$
  δηλαδή ισούται με το στοιχείο ij του $(A+B)C$.

  Την ισότητα $A(C+D) = AC + AD$ δείξτε την μόνοι σας.

Μία από τις συνέπειες της μη αντιμεταθετικότητας του πολλαπλασιασμού που αναφέραμε προηγουμένως είναι το ότι δεν ισχύουν, γενικά, οι γνωστές ταυτότητες $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ κλπ. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) \quad \text{(από τον ορισμό των δυνάμεων)} \\ &= A(A+B) + B(A+B) \quad \text{(εφαρμόζοντας την πρώτη επιμεριστική ιδιότητα)} \\ &= A^2 + AB + BA + B^2 \quad \text{(εφαρμόζοντας την δεύτερη επιμεριστική ιδιότητα δύο φορές)} \\ &\neq A^2 + 2AB + B^2, \text{ γενικά,}\end{aligned}$$

μια που, γενικά, $AB \neq BA$. (Αν αναρωτιέστε γιατί γράφω κάθε τόσο «γενικά», ο λόγος είναι ότι κάποιοι πίνακες μπορούν να αντιμετατεθούν στον πολλαπλασιασμό.)

4 Τετραγωνικοί πίνακες

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ένας πίνακας λέμε ότι είναι **τετραγωνικός** αν έχει το ίδιο πλήθος γραμμών και στηλών.

Η πρώτη παρατήρηση που έχουμε να κάνουμε είναι ότι δύο τετραγωνικοί πίνακες μπορούν να πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους αν και μόνον αν έχουν τις ίδιες διαστάσεις και το αποτέλεσμα είναι ένας τετραγωνικός πίνακας ίδιων διαστάσεων:

$$\underset{n\times n}{A}\,\underset{n\times n}{B} = \underset{n\times n}{C}$$

Η **κύρια διαγώνιος** ενός τετραγωνικού πίνακα $\underset{n\times n}{A} = (a_{ij})$ είναι το διάνυσμα $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})'$. Στους παρακάτω τετραγωνικούς πίνακες έχω σημειώσει τις κύριες διαγωνίους τους:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ενός (τετραγωνικού) πίνακα θα τα λέμε «τα διαγώνια στοιχεία του» ενώ τα υπόλοιπα θα τα λέμε «τα μη διαγώνια στοιχεία του».

4.1 Διαγώνιοι πίνακες

Ένας (τετραγωνικός) πίνακας που έχει όλα τα εκτός κυρίας διαγωνίου στοιχεία του ίσα με μηδέν λέγεται διαγώνιος. Για παράδειγμα, οι ακόλουθοι πίνακες είναι διαγώνιοι:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ένας εναλλακτικός συμβολισμός για τους παραπάνω πίνακες είναι ο

$$\mathrm{diag}(1, -2), \quad \mathrm{diag}(0, 4), \quad \mathrm{diag}(-1, 2, 5), \quad \mathrm{diag}(2, 1, 0, -3, -1),$$

δηλαδή γράφουμε «diag» και μόνο τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου. Ένας άλλος συμβολισμός για διαγώνιους πίνακες διαστάσεων 3×3 ή μεγαλύτερων αντικαθιστά τα εκτός κυρίας διαγωνίου μηδενικά με ένα μεγάλο μηδέν. Για παράδειγμα οι δύο τελευταίοι παραπάνω πίνακες μερικές φορές γράφονται και ως

$$\begin{pmatrix} -1 & & \text{\Large 0} \\ & 2 & \\ \text{\Large 0} & & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 1 & & \text{\Huge 0} & \\ & & 0 & & \\ & \text{\Huge 0} & & -3 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Έστω $\underset{n\times m}{A} = (a_{ij})$ ένας οποιοσδήποτε πίνακας και $\underset{n\times n}{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, $\underset{m\times m}{M} = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$ δύο διαγώνιοι πίνακες με διαστάσεις τέτοιες ώστε να έχουν νόημα τα γινόμενα ΛA και AM. Το στοιχείο ij του πίνακα ΛA είναι $\lambda_i a_{ij}$ ενώ το στοιχείο ij του πίνακα AM είναι $a_{ij}\mu_j$. Για να το δείτε αυτό, παρατηρήστε ότι η γραμμή i του διαγώνιου πίνακα Λ έχει όλο μηδενικά εκτός από την θέση i που βρίσκεται το λ_i. Επομένως το στοιχείο ij του ΛA είναι

$$0a_{1j} + 0a_{2j} + \cdots + 0a_{i-1,j} + \lambda_i a_{ij} + 0a_{i+1,j} + \cdots + 0a_{nj} = \lambda_i a_{ij}.$$

Δείτε μόνοι σας γιατί ισχύει ο ισχυρισμός για τον AM. Επομένως: Ο πολλαπλασιασμός ενός πίνακα από αριστερά με έναν διαγώνιο δίνει έναν πίνακα που έχει τις γραμμές του πίνακα αυτού πολλαπλασιασμένες με τα αντίστοιχα στοιχεία του διαγωνίου ενώ ο πολλαπλασιασμός ενός πίνακα από δεξιά με έναν διαγώνιο δίνει έναν πίνακα που έχει τις στήλες του πίνακα αυτού πολλαπλασιασμένες με τα αντίστοιχα στοιχεία του διαγωνίου.

Να και δύο παραδείγματα:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2)(1) & (2)(-2) \\ (-1)(0) & (-1)(3) \\ (0)(-1) & (0)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3)(1) & (4)(-2) \\ (-3)(0) & (4)(3) \\ (-3)(-1) & (4)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 0 & 12 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

4.2 Ο μοναδιαίος πίνακας

Ένας ιδιαίτερος διαγώνιος πίνακας είναι εκείνος που έχει όλα τα διαγώνια στοιχεία του ίσα με τη μονάδα. Ένας τέτοιος πίνακας $n \times n$ λέγεται **μοναδιαίος πίνακας τάξης n**. Τον μοναδιαίο πίνακα τάξης n θα τον συμβολίζουμε με I_n. Για παράδειγμα,

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(Τον όρο «τάξη» θα τον εξηγήσουμε αργότερα.)

Οι μοναδιαίοι πίνακες έχουν την ιδιότητα που έχει η μονάδα στο σύνολο των αριθμών: Όπως το γινόμενο οποιουδήποτε αριθμού με τη μονάδα είναι ο ίδιος αριθμός έτσι και το γινόμενο οποιουδήποτε πίνακα με τον μοναδιαίο, είτε από αριστερά είτε από δεξιά, είναι ο ίδιος πίνακας:

$$I_n \underset{n\times m}{A} = A \quad \text{και} \quad \underset{n\times m}{A} I_m = A.$$

Το ότι ισχύουν αυτές οι δύο ισότητες το καταλαβαίνουμε από την ιδιότητα πολλαπλασιασμού με διαγώνιο πίνακα που συζητήσαμε παραπάνω.

Ο μοναδιαίος πίνακας είναι ο μόνος πίνακας που έχει την ιδιότητα να πολλαπλασιάζεται με οποιονδήποτε πίνακα και να τον αφήνει αναλλοίωτο. Για να το δούμε αυτό, ας θεωρήσουμε ότι κάποιος πίνακας $\underset{n\times n}{J}$ ικανοποιεί την σχέση $JA = A$ για οποιονδήποτε πίνακα $\underset{n\times m}{A}$. Τότε θέτοντας ως A τον I_n θα έχουμε $JI_n = I_n$. Αλλά ο I_n είναι ο μοναδιαίος επομένως αφήνει τον J αναλλοίωτο: $JI_n = J$. Επομένως το γινόμενο JI_n ισούται και με I_n και με J, πράγμα που συνεπάγεται ότι $J = I_n$.

Δείξτε μόνοι σας ότι αν κάποιος πίνακας $\underset{m\times m}{J}$ ικανοποιεί $AJ = A$ για οποιονδήποτε $n \times m$ πίνακα A τότε ισχύει $J = I_m$.

4.3 Ίχνος πίνακα

Το ίχνος ενός (τετραγωνικού) πίνακα $\underset{n\times n}{A} = (a_{ij})$ είναι το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του:

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(tr από την αγγλική λέξη trace). Για παράδειγμα, τα ίχνη των πινάκων που βλέπετε στην αρχή αυτής της ενότητας (εκείνων στους οποίους είχα σημαδέψει την κύρια διαγώνιο) είναι

$$2 + (-2) = 0, \quad 1 + 2 + 3 = 6$$

Το ίχνος του μοναδιαίου πίνακα τάξης n ισούται με n: $\mathrm{tr}(I_n) = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ άσσοι}} = n$.

Αν $\underset{n\times n}{A} = (a_{ij})$ ένας τετραγωνικός πίνακας και A' ο ανάστροφός του τότε

$$\mathrm{tr}(A') = \mathrm{tr}(A).$$

Για να το δείτε αυτό παρατηρήστε ότι όταν αναστρέφουμε έναν τετραγωνικό πίνακα τα διαγώνια στοιχεία παραμένουν στην ίδια θέση.

Για οποιουσδήποτε πίνακες $\underset{n\times n}{A} = (a_{ij})$, $\underset{n\times n}{B} = (b_{ij})$ (τετραγωνικούς ίδιων διαστάσεων ώστε να μπορούν να προστεθούν) έχουμε

$$\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$$

αφού τα διαγώνια στοιχεία του $A + B$ είναι τα $a_{11} + b_{11}, a_{22} + b_{22}, \ldots, a_{nn} + b_{nn}$ και

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A + B) = & \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = (a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) + \cdots + (a_{nn} + b_{nn}) \\ & = (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) + (b_{11} + b_{22} + \cdots + b_{nn}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \\ & = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B).\end{aligned}$$

Έστω πίνακες $\underset{n\times m}{A}, \underset{m\times n}{B}$, τέτοιοι ώστε τα γινόμενα $\underset{n\times n}{AB}$ και $\underset{m\times m}{BA}$ να έχουν και τα δύο νόημα. (Προσέξτε ότι λόγω των συγκεκριμένων διαστάσεων των A και B, οι AB και BA είναι και οι δύο τετραγωνικοί, όχι όμως απαραίτητα ίδιων διαστάσεων.) Ισχύει

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

Για να το δούμε αυτό, ας παρατηρήσουμε ότι τα n διαγώνια στοιχεία του $\underset{n\times n}{AB}$ είναι

$$\sum_{k=1}^{m} a_{1k}b_{k1}, \sum_{k=1}^{m} a_{2k}b_{k2}, \ldots, \sum_{k=1}^{m} a_{nk}b_{kn} \quad \text{επομένως} \quad \mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{ki}$$

Από την άλλη πλευρά, τα m διαγώνια στοιχεία του $\underset{m\times m}{BA}$ είναι

$$\sum_{i=1}^{n} b_{1i}a_{i1}, \sum_{i=1}^{n} b_{2i}a_{i2}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} b_{mi}a_{im} \quad \text{επομένως} \quad \mathrm{tr}(BA) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}$$

Θυμηθείτε τι είχαμε πει νωρίτερα για τα διπλά αθροίσματα: Σε ένα διπλό άθροισμα επιτρέπεται να αλλάξουμε τη σειρά των αθροίσεων αν τα όρια της εσωτερικής άθροισης δεν εξαρτώνται από την μεταβλητή της εξωτερικής. Άρα,

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \mathrm{tr}(BA).$$

Η ιδιότητα επεκτείνεται και σε περισσότερους από δύο πίνακες: Για τους $\underset{n\times m}{A}, \underset{m\times \ell}{B}, \underset{\ell\times k}{C}$ ισχύει

$$\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(BCA) = \mathrm{tr}(CAB)$$

και, ακόμη γενικότερα, για τους $\underset{n_1\times n_2}{A_1}, \underset{n_2\times n_3}{A_2}, \ldots, \underset{n_k\times n_1}{A_k}$ ισχύει

$$\mathrm{tr}(\underset{n_1\times n_1}{A_1A_2\cdots A_k}) = \mathrm{tr}(\underset{n_2\times n_2}{A_2\cdots A_kA_1}) = \mathrm{tr}(\underset{n_3\times n_3}{A_3\cdots A_kA_1A_2}) = \cdots$$

(Δηλαδή, το ίχνος του γινομένου πίνακων που προκύπτει μετακινώντας κάθε φορά τον πρώτο πίνακα στο τέλος παραμένει αναλλοίωτο.)

4.4 Ορίζουσα πίνακα

Τις ορίζουσες πινάκων 2×2 τις γνωρίζετε από το σχολείο: Ξέρετε ότι

$$\text{η ορίζουσα του πίνακα } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ είναι ο αριθμός } \alpha\delta - \beta\gamma.$$

Εδώ θα συζητήσουμε ορίζουσες πινάκων $n \times n$ για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό n.

Γενικά, η ορίζουσα ενός (τετραγωνικού) πίνακα $\underset{n\times n}{A}$ είναι ένας αριθμός. Την ορίζουσα του πίνακα A θα την συμβολίζουμε με $|A|$. (Ο συμβολισμός μοιάζει με αυτόν της απόλυτης τιμής αλλά η ορίζουσα δεν έχει καμμία σχέση μ' αυτήν.) Άλλος συμβολισμός που μπορεί να συναντήσετε για την ορίζουσα του A είναι ο $\det(A)$ από την λέξη determinant που είναι ο αγγλικός όρος για την ορίζουσα. Να σημειωθεί ότι όταν θέλουμε να συμβολίσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα γράφοντάς τον αναλυτικά θα βάζουμε κάθετες γραμμές αντί για παρενθέσεις. Για παράδειγμα, την ορίζουσα του πίνακα $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ θα την γράφουμε $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$.

Ως μαθηματικό αντικείμενο η ορίζουσα έχει λίγο περίπλοκο ορισμό. Γι' αυτό θα την ορίσουμε βάσει του αναδρομικού τύπου που δίνει την τιμή της. Η ορίζουσα του πίνακα $\underset{n\times n}{A} = (a_{ij})$ ορίζεται ως

$$|A| = \begin{cases} a_{11}, & \text{αν } n = 1, \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1}|A_{i1}|, & \text{αν } n > 1, \end{cases} \tag{1}$$

όπου εδώ A_{ij} είναι ο πίνακας διαστάσεων $(n-1)\times(n-1)$ που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την γραμμή i και την στήλη j. (Μην τρομάζετε με τον παραπάνω τύπο, θα τον εξηγήσουμε αμέσως.)

Κατ' αρχάς ο τύπος λέει ότι αν $n = 1$, οπότε και ο πίνακας είναι 1×1, τότε η ορίζουσα ισούται με το μοναδικό στοιχείο του, το a_{11}. Αν όμως $n > 1$ τότε παίρνουμε την πρώτη στήλη του (που αποτελείται από τα στοιχεία $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}$) και υπολογίζουμε την εξής παράσταση:

$$+a_{11}|A_{11}| - a_{21}|A_{21}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}|A_{n1}|.$$

Βλέπουμε ότι η παράσταση είναι ένα άθροισμα, κάθε όρος του οποίου είναι το γινόμενο ενός στοιχείου της πρώτης στήλης επί την ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει αν διαγράψουμε από τον A την στήλη και την γραμμή που βρίσκεται αυτό το στοιχείο (δηλαδή για το a_{i1} την στήλη 1 και την γραμμή i). Στο άθροισμα τα πρόσημα εναλλάσσονται: το a_{11} έχει $+$, το a_{21} έχει $-$, το a_{31} (αν υπάρχει) έχει $+$, το a_{41} (αν υπάρχει) έχει $-$ κ.ο.κ. Γενικά, το a_{i1} έχει το πρόσημο του $(-1)^{i+1}$ (το a_{11} έχει του $(-1)^{1+1} = +1$, το a_{21} έχει του $(-1)^{2+1} = -1$ κλπ.)

Είναι φυσικό να αναρωτηθεί κανείς πώς υπολογίζουμε τις ορίζουσες $|A_{11}|, |A_{21}|, \ldots, |A_{n1}|$. Είπαμε παραπάνω ότι αν ο πίνακας είναι 1×1 τότε η ορίζουσα ταυτίζεται με το μοναδικό στοιχείο του. Αν ο πίνακας είναι 2×2, τότε σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}|A_{11}| - a_{21}|A_{21}| = a_{11} \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

μια και ο πίνακας A_{11} που προκύπτει διαγράφοντας την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη του A είναι ο πίνακας (a_{22}) (που έχει διαστάσεις 1×1), οπότε $|A_{11}| = a_{22}$, ενώ ο πίνακας A_{21} που προκύπτει διαγράφοντας την δεύτερη γραμμή και την πρώτη στήλη του A είναι ο πίνακας (a_{12}), οπότε $|A_{21}| = a_{12}$. (Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ είναι το ίδιο με εκείνο που ξέρετε από το σχολείο. Για τις ορίζουσες 2×2 θα χρησιμοποιούμε τον τρόπο του σχολείου· δεν χρειάζεται να αναφερόμαστε στον ορισμό που δώσαμε εδώ.)

Υποθέστε τώρα ότι ο πίνακας είναι 3×3. Τότε, σύμφωνα με τον ορισμό,

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}|A_{11}| - a_{21}|A_{21}| + a_{31}|A_{31}| \\
&= a_{11} \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix} \\
&= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&\quad \text{(οπότε έχουμε να υπολογίσουμε ορίζουσες } 2 \times 2 \text{ που είδαμε πώς γίνεται)} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}.
\end{aligned}$$

Αυτός είναι ο «τύπος» για τις ορίζουσες 3×3 (τον οποίον φυσικά δεν χρειάζεται να τον μάθουμε απ' έξω, μας αρκεί μόνο να θυμόμαστε πώς την υπολογίζουμε βάσει του ορισμού).

Αν ο πίνακας είναι 4×4 τότε από τον ορισμό έχουμε

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}|A_{11}| - a_{21}|A_{21}| + a_{31}|A_{31}| - a_{41}|A_{41}|$$

με τις ορίζουσες $|A_{11}|, |A_{21}|, |A_{31}|, |A_{41}|$ να είναι 3×3 (μια και σε σχέση με τον αρχικό πίνακα 4×4 είναι ορίζουσες πινάκων που τους λείπει μία γραμμή και μία στήλη) που είδαμε προηγουμένως πώς υπολογίζονται.

Γενικά, αν ο πίνακας είναι $n \times n$, τότε για τον υπολογισμό της ορίζουσάς του πρέπει να υπολογίσουμε ορίζουσες $(n-1) \times (n-1)$ που για τον υπολογισμό της κάθε μίας πρέπει να υπολογίσουμε ορίζουσες $(n-2) \times (n-2)$ κ.ο.κ. μέχρι να φτάσουμε σε ορίζουσες 2×2 που τις υπολογίζουμε όπως ξέρουμε από το σχολείο. (Γι' αυτό και αναφέρθηκα στον ορισμό ως «αναδρομικό»: για το n χρησιμοποιείται το αποτέλεσμα για $n-1$, για το $n-1$ χρησιμοποιείται το αποτέλεσμα για $n-2$ κ.ο.κ. μέχρι να φτάσουμε στο 1 όπου ο τύπος είναι σαφής.)

Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} &= (3)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= (3)\{(1)(2) - (-2)(2)\} - (1)\{(-1)(2) - (0)(2)\} + (-1)\{(-1)(-2) - (0)(1)\} \\
&= (3)(6) - (1)(-2) + (-1)(2) = 18 + 2 - 2 = 18
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} &= (2)\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&\quad \text{(υπολογίστε μόνοι σας τις ορίζουσες } 3 \times 3 \text{ και βρείτε } -8, 10, 4, 4, \text{ αντίστοιχα)} \\
&= (2)(-8) - (-1)(10) + (1)(4) - (-2)(4) = -16 + 10 + 4 + 8 = 6
\end{aligned}$$

Ο τύπος υπολογισμού της ορίζουσας $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}|$ βασίζεται όπως είδαμε στην πρώτη στήλη γι' αυτό αναφερόμαστε σε αυτόν τον τύπο ως «ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς την στήλη 1». Ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει αν την αναπτύξουμε και ως προς οποιαδήποτε άλλη στήλη αλλά και ως προς οποιαδήποτε γραμμή. Ισχύει δηλαδή

$$\begin{aligned}
|A| &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}|}_{\text{(ως προς την στήλη 1)}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+2}a_{i2}|A_{i2}|}_{\text{(ως προς την στήλη 2)}} = \cdots = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}|}_{\text{(ως προς την στήλη } n\text{)}} \\
&= \underbrace{\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}|A_{1j}|}_{\text{(ως προς την γραμμή 1)}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n}(-1)^{2+j}a_{2j}|A_{2j}|}_{\text{(ως προς την γραμμή 2)}} = \cdots = \underbrace{\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}a_{nj}|A_{nj}|}_{\text{(ως προς την γραμμή } n\text{)}}
\end{aligned}$$

Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} &= +(3)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{(ως προς την στήλη 1)} \\
&= +(3)(6) - (1)(-2) + (-1)(2) = 18 + 2 - 2 = 18 \\
&= -(-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{(ως προς την στήλη 2)} \\
&= -(-1)(0) + (1)(6) - (2)(-6) = 0 + 6 + 12 = 18 \\
&= +(0)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(ως προς την στήλη 3)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= +(0)(3)-(-2)(5)+(2)(4)=0+10+8=18\\
&= +(3)\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 2\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{vmatrix}+(0)\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix} \quad \text{(ως προς την γραμμή 1)}\\
&= +(3)(6)-(-1)(0)+(0)(3)=18+0+0=18\\
&= -(1)\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}+(1)\begin{vmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix} \quad \text{(ως προς την γραμμή 2)}\\
&= -(1)(-2)+(1)(6)-(-2)(5)=2+6+10=18\\
&= +(-1)\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix}-(2)\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix}+(2)\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} \quad \text{(ως προς την γραμμή 3)}\\
&= +(-1)(2)-(2)(-6)+(2)(4)=-2+12+8=18.
\end{aligned}
$$

Όλα δίνουν την ίδια τιμή: 18.

Η παρακολούθηση της απόδειξης του ότι όλα τα αναπτύγματα δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα απαιτεί αρκετό χρόνο. Γι' αυτό θα την παραλείψουμε και θα δεχτούμε ότι αυτό που είδαμε ότι συμβαίνει στο παράδειγμα ισχύει πάντοτε για τις ορίζουσες όλων των πινάκων $n \times n$.

Ποιο απ' όλα τα αναπτύγματα είναι προτιμότερο να παίρνουμε; Η απάντηση είναι απλή: όποιο μας βολεύει κάθε φορά. Συνήθως αναπτύσσουμε ως προς την γραμμή ή στήλη που περιέχει τα περισσότερα μηδενικά έτσι ώστε να υπολογίσουμε όσο το δυνατόν λιγότερες ορίζουσες αργότερα. Για παράδειγμα, για να υπολογίσουμε την ορίζουσα $\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{vmatrix}$ μας συμφέρει να αναπτύξουμε ως προς την τρίτη γραμμή που έχει δύο μηδενικά:

$$
\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{vmatrix} = (-1)^{3+3}(-4)\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = (-4)(3) = -12
$$

Όποιο άλλο ανάπτυγμα και να παίρναμε θα βρίσκαμε το ίδιο αποτέλεσμα αλλά αναπτύσσοντας ως προς την τρίτη γραμμμή χρειάστηκε μετά να υπολογίσουμε μόνο μία ορίζουσα.

Το γεγονός ότι δεν έχει σημασία ως προς το ποια γραμμή ή στήλη θα αναπτύξουμε την ορίζουσα συνεπάγεται αμέσως ότι η ορίζουσα του αναστρόφου ενός πίνακα ισούται με την ορίζουσα του πίνακα:

$$|A'| = |A|$$

Διάφορες άλλες χρήσιμες και σημαντικές ιδιότητες των οριζουσών είναι οι ακόλουθες:

- Αν $\underset{n\times n}{A}$, $\underset{n\times n}{B}$ είναι τετραγωνικοί πίνακες ίδιων διαστάσεων τότε

  $$|AB| = |A||B|$$

  Για παράδειγμα, έστω

  $$A = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}, \quad \text{οπότε } AB = \begin{pmatrix}-1 & -2\\ -4 & 13\end{pmatrix}$$

  και

  $$|A| = \begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix} = 7, \quad |B| = \begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix} = -3, \quad |AB| = \begin{vmatrix}-1 & -2\\ -4 & 13\end{vmatrix} = -21 = (7)(-3)$$

(όμως, γενικά, $|A + B| \neq |A| + |B|$)

- Αν δύο γραμμές ή δύο στήλες ενός πίνακα ταυτίζονται τότε η ορίζουσά του ισούται με μηδέν.
- Αν εναλλάξουμε μεταξύ τους δύο οποιεσδήποτε γραμμές ή στήλες ενός πίνακα τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο, π.χ.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 18 \qquad \text{και} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -18$$

(διαπιστώστε το)

- Αν προσθέσουμε σε μία γραμμή ή μία στήλη ένα πολλαπλάσιο μίας άλλης γραμμής ή στήλης, αντίστοιχα, τότε η ορίζουσα δεν αλλάζει, π.χ.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+(-2)(1) & -1+(-2)(1) & 0+(-2)(-2) \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 18$$

- Αν πολλαπλασιάσουμε μία γραμμή ή μία στήλη με κάποιον αριθμό τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται επίσης επί αυτόν τον αριθμό, π.χ.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -3, \qquad \begin{vmatrix} (5)(-1) & (5)(1) \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (5)(-3) = -15$$

- Αν c κάποιος αριθμός και $\underset{n\times n}{A}$ τότε

$$|cA| = c^n|A|$$

π.χ.

$$\underset{2\times 2}{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad 3A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -3, \quad \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} = -27 = (3^2)(-3)$$

- Αν γράψουμε τη στήλη (δηλαδή το διάνυσμα) $\underset{\sim}{a}_j$ ως άθροισμα δύο άλλων διανυσμάτων, $\underset{\sim}{a}_j = \underset{\sim}{b}_j + \underset{\sim}{c}_j$, τότε

$$\left|\underset{\sim}{a}_1 \;\; \underset{\sim}{a}_2 \;\; \cdots \;\; \underset{\sim}{a}_j \;\; \cdots \;\; \underset{\sim}{a}_n\right| = \left|\underset{\sim}{a}_1 \;\; \underset{\sim}{a}_2 \;\; \cdots \;\; \underset{\sim}{b}_j \;\; \cdots \;\; \underset{\sim}{a}_n\right| + \left|\underset{\sim}{a}_1 \;\; \underset{\sim}{a}_2 \;\; \cdots \;\; \underset{\sim}{c}_j \;\; \cdots \;\; \underset{\sim}{a}_n\right|$$

π.χ.

$$18 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1-2 & 0 \\ 1 & 5-4 & -2 \\ -1 & 1+1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 36 + (-18)$$

Η ορίζουσα ενός διαγωνίου πίνακα ισούται με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & \text{\Large 0} \\ & \lambda_2 & \\ \text{\Large 0} & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

Για να δείτε γιατί, αναπτύξτε ως προς την πρώτη στήλη που έχει μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο το λ_1 για να δείτε ότι η ορίζουσα ισούται με

$$\lambda_1 \begin{vmatrix} \lambda_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

Κάντε το ίδιο με την πρώτη στήλη της τελευταίας ορίζουσας για να πάρετε $\lambda_1 \lambda_2 \begin{vmatrix} \lambda_3 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix}$ κ.ο.κ.

Ειδικότερα, η ορίζουσα του μοναδιαίου πίνακα I_n ισούται με 1.

4.5 Αντίστροφος πίνακα

Ένας πίνακας $\underset{n\times n}{A}$ λέγεται **αντιστρέψιμος** αν υπάρχει πίνακας $\underset{n\times n}{B}$ τέτοιος ώστε

$$AB = BA = I_n$$

Αν συμβαίνει κάτι τέτοιο τότε ο πίνακας B είναι μοναδικός: δεν υπάρχει άλλος πίνακας που να ικανοποιεί την παραπάνω ιδιότητα. Για να το δείτε αυτό υποθέστε ότι υπάρχει κάποιος πίνακας $\underset{n\times n}{C}$ για τον οποίον ισχύει $CA = I_n$. Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά με τον B παίρνουμε

$$\begin{aligned}
(CA)B = I_n B &\Leftrightarrow C(AB) = B \\
&\quad \text{(εφαρμόζοντας στο αριστερό μέλος την προσεταιριστική ιδιότητα} \\
&\quad \text{ και στο δεξί το ότι } I_n B = B) \\
&\Leftrightarrow C I_n = B \\
&\quad (\text{γιατί } AB = I_n) \\
&\Leftrightarrow C = B.
\end{aligned}$$

Δείξτε μόνοι σας ότι αν υπάρχει πίνακας $\underset{n\times n}{C}$ έτσι ώστε $AC = I_n$ τότε επίσης $C = B$.

Ο μοναδικός πίνακας B (αν υπάρχει) για τον οποίον ισχύει η παραπάνω ιδιότητα καλείται **αντίστροφος** του A και συμβολίζεται με A^{-1}.

Παρατηρήστε ότι ο συμβολισμός είναι ο ίδιος με εκείνον που χρησιμοποιούμε για τον αντίστροφο ενός αριθμού διαφορετικού από το μηδέν: ο αντίστροφος ενός αριθμού $a \neq 0$ είναι ο $a^{-1} \equiv 1/a$ που όταν πολλαπλασιαστεί με τον a δίνει τη μονάδα: $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Ακριβώς το ίδιο ισχύει και για τους αντίστροφους πίνακες με τον ρόλο της μονάδας να τον έχει ο μοναδιαίος πίνακας. Δεν γράφουμε όμως ποτέ $1/A$ για τον αντίστροφο ενός πίνακα: η πράξη της διαίρεσης δεν έχει νόημα στους πίνακες.

Αν ο $\underset{n\times n}{A}$ είναι αντιστρέψιμος τότε η ορίζουσα του αντιστρόφου του ισούται με τον αντίστροφο της ορίζουσάς του:

$$|A^{-1}| = 1/|A|$$

Είναι εύκολο να το δούμε αυτό: Αφού $AA^{-1} = I_n$, θα έχουμε $|AA^{-1}| = |I_n| \Leftrightarrow |A||A^{-1}| = 1$. Αυτό μας λέει ότι αν κάποιος πίνακας έχει μηδενική ορίζουσα τότε δεν είναι αντιστρέψιμος. Από την άλλη πλευρά, εφ' όσον $|A| \neq 0$ τότε ο A^{-1} υπάρχει και το στοιχείο ij του ισούται με $(-1)^{i+j}|A_{ji}|/|A|$, όπου $|A_{ji}|$ είναι η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει διαγράφοντας την γραμμή j και την στήλη

i του A. Για να καταλάβουμε γιατί, ας δούμε ποιο είναι το στοιχείο ij του πίνακα AB όπου B ο πίνακας με στοιχείο ij το $(-1)^{i+j}|A_{ji}|/|A|$. Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο της γραμμής i του A με την στήλη j του B βρίσκουμε

$$a_{i1}(-1)^{1+j}|A_{j1}|/|A|+a_{i2}(-1)^{2+j}|A_{j2}|/|A|+\cdots+a_{in}(-1)^{n+j}|A_{jn}|/|A| = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{ik}|A_{jk}|.$$

Στην περίπτωση που $j = i$ τότε έχουμε $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{jk}|A_{ik}| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}a_{ik}|A_{ik}| = |A|$ μια που το άθροισμα είναι το ανάπτυγμα της ορίζουσας του A ως προς την γραμμή j. Αυτό μας λέει ότι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα AB είναι 1. Στην περίπτωση που $j \neq i$ θεωρήστε τον πίνακα που προκύπτει από τον A αν αντικαταστήσουμε την γραμμή j του με την i. Αυτός ο πίνακας έχει δύο ίδιες γραμμές οπότε η ορίζουσά του είναι ίση με μηδέν. Το ανάπτυγμα της ορίζουσας αυτού του πίνακα ως προς την γραμμή j είναι $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{ik}|A_{jk}|$ (μια και η γραμμή j του είναι $a_{i1},\ldots,a_{in}$). Επομένως για $i \neq j$ το στοιχείο ij του AB (που είναι το προηγούμενο άθροισμα πολλαπλασιασμένο με $|A|$) ισούται με μηδέν. Δείξτε μόνοι σας ότι ο πίνακας B ικανοποιεί $BA = I_n$. Επομένως

$$\boxed{\text{ένας πίνακας } \underset{n\times n}{A} \text{ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν η ορίζουσά του δεν είναι μηδέν.}}$$

Ο πίνακας διαστάσεων $n \times n$ του οποίου το στοιχείο ij ισούται με $(-1)^{i+j}|A_{ji}|$ καλείται **προσαρτημένος** (adjoint) στον A και συχνά συμβολίζεται με $\mathrm{adj}(A)$. Επομένως ο αντίστροφος του A είναι ο $A^{-1} = \mathrm{adj}(A)/|A|$.

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω στην περίπτωση πινάκων 2×2 βρίσκουμε ότι

$$\text{ο αντίστροφος του } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ είναι ο } \frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

εφ' όσον φυσικά $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ (δηλαδή η ορίζουσα είναι μη μηδενική). Για του λόγου το αληθές:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha)(\delta)+(\beta)(-\gamma) & (\alpha)(-\beta)+(\beta)(\alpha) \\ (\gamma)(\delta)+(\delta)(-\gamma) & (\gamma)(-\beta)+(\delta)(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\delta-\beta\gamma & 0 \\ 0 & \alpha\delta-\beta\gamma \end{pmatrix}$$

Ας βρούμε και τον αντίστροφο του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ που στην προηγούμενη ενότητα είχαμε δει με πολλούς διαφορετικούς τρόπους ότι έχει ορίζουσα $18 \neq 0$ άρα είναι αντιστρέψιμος. Ο αντίστροφός του είναι ο

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/18 & 2/18 & 2/18 \\ 0 & 6/18 & 6/18 \\ 3/18 & -5/18 & 4/18 \end{pmatrix}$$

(Δεν έχω κάνει απλοποιήσεις, όπως π.χ. $6/18 = 1/3$, απλώς για να φαίνεται ακριβώς τι γίνεται.) Ας επιβεβαιώσουμε ότι αυτός είναι πράγματι ο αντίστροφος του A:

$$\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} (6)(3)+(2)(1)+(2)(-1) & (6)(-1)+(2)(1)+(2)(2) & (6)(0)+(2)(-2)+(2)(2) \\ (0)(3)+(6)(1)+(6)(-1) & (0)(-1)+(6)(1)+(6)(2) & (0)(0)+(6)(-2)+(6)(2) \\ (3)(3)+(-5)(1)+(4)(-1) & (3)(-1)+(-5)(1)+(4)(2) & (3)(0)+(-5)(-2)+(4)(2) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 18+2-2 & -6+2+4 & 0-4+4 \\ 0+6-6 & 0+6+12 & 0-12+12 \\ 9-5-4 & -3-5+8 & 0+10+8 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επιβεβαιώστε εσείς ότι πολλαπλασιάζοντας και από δεξιά παίρνουμε πάλι τον μοναδιαίο πίνακα.

Όπως καταλαβαίνετε το να βρούμε τον αντίστροφο πίνακα μεγαλύτερων διαστάσεων με την παραπάνω διαδικασία απαιτεί πολλούς υπολογισμούς. Σε επόμενη ενότητα θα εξηγήσουμε πώς μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο ενός πίνακα $n \times n$ λύνοντας ταυτόχρονα n συστήματα εξισώσεων.

Όπως είπαμε, ο $\underset{n\times n}{A}$ με τον αντίστροφό του A^{-1} ικανοποιούν τις σχέσεις $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Από αυτό βλέπουμε αμέσως ότι ο αντίστροφος του αντιστρόφου ενός πίνακα είναι ο αρχικός πίνακας:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Ο αντίστροφος του αναστρόφου ενός πίνακα είναι ο ανάστροφος του αντιστρόφου του. Πράγματι, εφαρμόζοντας την ιδιότητα $(AB)' = B'A'$ παίρνουμε

$$A'(A^{-1})' = (A^{-1}A)' = I_n' = I_n \quad \text{και} \quad (A^{-1})'A' = (AA^{-1})' = I_n' = I_n$$

Αν οι πίνακες $\underset{n\times n}{A}, \underset{n\times n}{B}$ είναι αντιστρέψιμοι τότε ο AB είναι επίσης αντιστρέψιμος και ισχύει

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Είναι εύκολο να το δούμε αυτό: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$. Δείξτε εσείς και ότι $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$. Η ιδιότητα γενικεύεται και σε περισσότερους από δύο αντιστρέψιμους πίνακες $n \times n$:

$$(A_1A_2\cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

Ένας διαγώνιος πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν τα διαγώνια στοιχεία του είναι όλα μη μηδενικά (αφού τότε και μόνον τότε η ορίζουσά του είναι διάφορη του μηδενός). Ο αντίστροφος του διαγώνιου πίνακα $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ είναι ο $\mathrm{diag}(1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \ldots, 1/\lambda_n)$. Για παράδειγμα,

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Φυσικά, ο αντίστροφος του μοναδιαίου πίνακα είναι ο εαυτός του:

$$I_n^{-1} = I_n$$

4.6 Τριγωνικοί πίνακες

Ένας (τετραγωνικός) πίνακας καλείται **άνω τριγωνικός** αν όλα τα στοιχεία του κάτω από την κύρια διαγώνιο ισούνται με μηδέν. Για παράδειγμα, οι πίνακες

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \mathit{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \mathit{0} & 0 & -5 \\ \mathit{0} & \mathit{0} & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 12 & 0 & 4 & -1 \\ \mathit{0} & -3 & 1 & 1 \\ \mathit{0} & \mathit{0} & 1 & 0 \\ \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} & 2 \end{pmatrix}$$

είναι άνω τριγωνικοί γιατί όλα τα στοιχεία τους κάτω από την κύρια διαγώνιο (που τα έχω γράψει με πλάγια γραμματοσειρά) είναι μηδέν.

Ένας (τετραγωνικός) πίνακας καλείται **κάτω τριγωνικός** αν όλα τα στοιχεία του πάνω από την κύρια διαγώνιο ισούνται με μηδέν. Για παράδειγμα, οι ακόλουθοι πίνακες είναι κάτω τριγωνικοί:

$$\begin{pmatrix} 3 & \mathit{0} \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & \mathit{0} & \mathit{0} \\ 0 & 0 & \mathit{0} \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} \\ 1 & 1 & \mathit{0} & \mathit{0} \\ -3 & 10 & 1 & \mathit{0} \\ -1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Προφανώς, ο ανάστροφος ενός άνω τριγωνικού πίνακα είναι κάτω τριγωνικός και το αντίστροφο.

Κάθε διαγώνιος πίνακας είναι ταυτόχρονα και άνω και κάτω τριγωνικός.

Η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα (είτε άνω είτε κάτω) ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του. Για να το δείτε αυτό για τους άνω τριγωνικούς πίνακες, αναπτύξτε την ορίζουσα ως προς την πρώτη στήλη του που έχει όλα τα στοιχεία της μηδέν εκτός ενδεχομένως από το πρώτο. Στη συνέχεια κάντε το ίδιο και με τις ορίζουσες μικρότερης τάξης. Για τους κάτω τριγωνικούς ακολουθήστε την ίδια διαδιασία αλλά αναπτύσσοντας ως προς τις γραμμές.

Υπολογισμός οριζουσών μετασχηματίζοντάς τις σε τριγωνικές. Η τελευταία ιδιότητα των τριγωνικών πινάκων μας δίνει έναν λιγότερο χρονοβόρο τρόπο να υπολογίζουμε ορίζουσες, ειδικά αν έχουν μεγάλη διάσταση. Όπως είπαμε στην ενότητα των οριζουσών, η πρόσθεση ενός πολλαπλασίου μίας γραμμμής σε μία άλλη γραμμή δεν αλλάζει την τιμή της ορίζουσας ενώ η εναλλαγή δύο γραμμών της αλλάζει μόνο το πρόσημο. Προσθέτοντας κατάλληλα πολλαπλάσια γραμμών σε άλλες γραμμές και εναλλάσσοντας γραμμές μεταξύ τους μπορούμε να καταλήξουμε εύκολα σε έναν άνω τριγωνικό πίνακα και να υπολογίσουμε την ορίζουσα πολλαπλασιάζοντας τα διαγώνια στοιχεία του. Το επόμενο παράδειγμα θα σας βοηθήσει να καταλάβετε. Κάτω από κάθε ορίζουσα θα σημειώνω τι πράξεις πρόκειται να κάνω προκειμένου να πάρω την επόμενη. Ο συμβολισμός $r_i \to r_i + \lambda r_j$ θα σημαίνει ότι την θέση της γραμμής i (της «ith row», εξ ου και το r) θα την πάρει το άθροισμα της γραμμής i και της γραμμής j πολλαπλασιασμένης επί λ (οπότε η τιμή της ορίζουσας δεν θα αλλάξει) ενώ $r_i \leftrightarrow r_j$ θα σημαίνει αμοιβαία αλλαγή των γραμμών i και j (οπότε η ορίζουσα θα αλλάξει πρόσημο).

$$\underset{\substack{r_1 \to r_1 + 2r_2 \\ r_3 \to r_3 + 2r_2}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \underset{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ \text{(θα αλλάξει} \\ \text{το πρόσημο)}}}{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = - \underset{\substack{r_3 \to r_3 - (3/2)r_2 \\ r_4 \to r_4 - r_2}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}} =$$

$$-\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -17/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -17/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -70/17 \end{vmatrix} = -(-1)(2)(-17/2)(-70/17) = 70$$

$$r_4 \to r_4 - (4/17)r_3$$

Το ποιοι ακριβώς μετασχηματισμοί γραμμών θα χρησιμοποιηθούν δεν έχει καμμία σημασία. Διαφορετικοί δε μετασχηματισμοί θα οδηγήσουν πιθανότατα σε διαφορετικό άνω τριγωνικό πίνακα. Εφ' όσον όμως οι πράξεις γίνουν σωστά, η ορίζουσα του άνω τριγωνικού πίνακα που θα καταλήξουμε συμπίπτει με την ορίζουσα του αρχικού πίνακα. Δοκιμάστε στο προηγούμενο παράδειγμα τους ακόλουθους μετασχηματισμούς (με αυτήν τη σειρά): $r_1 \to r_1+r_2$, $r_2 \to r_2+r_1$, $r_3 \to r_3-2r_1$, $r_2 \to r_2 + 2r_3$, $r_4 \to r_4 + 2r_3$, $r_2 \leftrightarrow r_3$, $r_4 \to r_4 - (19/17)r_3$ για να υπολογίσετε την ορίζουσα πολλαπλασιάζοντας $-(1)(-1)(-17)(-70/17) = 70$.

Αντίστοιχους μετασχηματισμούς μπορούμε να κάνουμε και στις στήλες εκτός από τις γραμμές. Θα υπολογίσω στη συνέχεια μία, φαινομενικά «δύσκολη» ορίζουσα κάνοντας μετασχηματισμούς σε γραμμές και στήλες. Τους μετασχηματισμούς των στηλών θα τους συμβολίσω με $c_i \to c_i + \lambda c_j$ (η στήλη i «η ith column» αντικαθίσταται με το άθροισμα της στήλης i και της στήλης j πολλαπλασιασμένης επί λ, οπότε η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει) και $c_i \leftrightarrow c_j$ (αμοιβαία αλλαγή των στηλών i και j, οπότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο). Θεωρήστε την ορίζουσα $n \times n$

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b & b \\ b & a & b & \dots & b & b \\ b & b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a & b \\ b & b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$$

δηλαδή την ορίζουσα του πίνακα $n \times n$ που έχει τα διαγώνια στοιχεία του ίσα με a και τα μη διαγώνια ίσα με b. Αν σας προβληματίζει η γενική μορφή της δείτε την για $n = 2, 3, 4, 5$:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & b & b & b \\ b & a & b & b & b \\ b & b & a & b & b \\ b & b & b & a & b \\ b & b & b & b & a \end{vmatrix}$$

Θα δείξουμε ότι η ορίζουσα ισούται με $(a-b)^{n-1}\{a+(n-1)b\}$ φέρνοντάς στην σε άνω τριγωνική μορφή και πολλαπλασιάζοντας τα διαγώνια στοιχεία. Αυτό σημαίνει ότι για $n = 2$ ισούται με $(a-b)(a+b)$ (κάτι που βλέπουμε και απ' ευθείας αφού κάνοντας την πράξη του σχολείου παίρνουμε $a^2 - b^2$), για $n = 3$ ισούται με $(a-b)^2(a+2b)$, για $n = 4$ ισούται με $(a-b)^3(a+3b)$ κλπ.

Για τον υπολογισμό θα εφαρμόσουμε πρώτα διαδοχικά τους εξής μετασχηματισμούς: $c_1 \to c_1 - c_2, c_2 \to c_2 - c_3, c_3 \to c_3 - c_4, \dots, c_{n-1} \to c_{n-1} - c_n$, δηλαδή από κάθε μία από τις $n-1$ πρώτες στήλες θα αφαιρέσουμε την επόμενη (οπότε η τιμή της ορίζουσας δεν θα αλλάζει). Όταν τους κάνουμε αυτούς θα καταλήξουμε στην ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ b-a & a-b & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & b-a & a-b & \dots & 0 & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b-a & a \end{vmatrix}$$

(Εφαρμόστε τους στις ορίζουσες 4×4 και 5×5 για να τους παρακολουθήσετε καλύτερα.) Η ορίζουσα δεν είναι προς το παρόν ενός άνω τριγωνικού πίνακα: έχει μη μηδενικά στοιχεία και στην «μικρή διαγώνιο» που βρίσκεται ακριβώς κάτω από την κύρια και όλα είναι ίσα με $b - a$. Τώρα θα εφαρμόσουμε μία δεύτερη ακολουθία μετασχηματισμών: $r_2 \to r_2 + r_1, r_3 \to r_3 + r_2, \ldots, r_n \to r_n + r_{n-1}$, δηλαδή θα προσθέσουμε την πρώτη γραμμή στην δεύτερη, την δεύτερη (όπως έχει διαμορφωθεί από τον πρώτο μετασχηματισμό) στην τρίτη κ.ο.κ. Οι μετασχηματισμοί αυτοί θα «διώξουν» τα $b - a$ (αφού θα προστεθούν σε αυτά τα $a - b$) και θα «πειράξουν» και την τελευταία στήλη. Η ορίζουσα που καταλήγουμε είναι η

$$\begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & \ldots & 0 & b \\ 0 & a-b & 0 & \ldots & 0 & 2b \\ 0 & 0 & a-b & \ldots & 0 & 3b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a-b & (n-1)b \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a+(n-1)b \end{vmatrix}$$

Αυτή είναι η ορίζουσα ενός άνω τριγωνικού πίνακα. Η διαγώνιος έχει στις πρώτες $n - 1$ θέσεις το $a - b$ και στην τελευταία το $a + (n - 1)b$. Πολλαπλασιάζουμε τώρα και παίρνουμε $(a - b)^{n-1}\{a + (n - 1)b\}$.

4.7 Συμμετρικοί πίνακες

Ένας (τετραγωνικός) πίνακας $\underset{n\times n}{A}$ καλείται συμμετρικός αν συμπίπτει με τον ανάστροφό του, αν δηλαδή

$$A' = A$$

Ισοδύναμα, ένας πίνακας είναι συμμετρικός αν τα στοιχεία ij και ji συμπίπτουν για κάθε i, j.

Σε έναν συμμετρικό πίνακα η πρώτη γραμμή ισούται με την πρώτη στήλη (ανεστραμμένη), η δεύτερη γραμμή ισούται με την δεύτερη στήλη (ανεστραμμένη) κ.ο.κ. Για παράδειγμα, οι ακόλουθοι πίνακες είναι συμμετρικοί:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι στους συμμετρικούς πίνακες η κύρια διαγώνιος είναι ένας καθρέφτης στον οποίον καθρεφτίζονται τα μη διαγώνια στοιχεία τους.

Προφανώς, κάθε διαγώνιος πίνακας είναι συμμετρικός.

Αν ένας συμμετρικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος τότε και ο αντίστροφός του είναι συμμετρικός. (Δείξτε το μόνοι σας.)

Για οποιονδήποτε πίνακα $\underset{n\times m}{A}$ οι πίνακες $\underset{n\times n}{AA'}$ και $\underset{m\times m}{A'A}$ είναι συμμετρικοί. Πράγματι, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $(AB)' = B'A'$ βλέπουμε ότι και οι δύο συμπίπτουν με τους αναστρόφους τους:

$$(AA')' = (A')'A' = AA' \quad \text{και} \quad (A'A)' = A'(A')' = A'A$$

Θα δούμε αργότερα ότι οι πίνακες AA' και $A'A$ έχουν κάποιες κοινές ιδιότητες με τον A και τον A'.

5 Πίνακες διαμερισμένοι σε μπλοκ

Θα ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Χωρίζω τον πίνακα σε τέσσερα κομμάτια φέρνοντας δύο νοητές γραμμές:

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -2 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Ο πίνακας έχει τώρα χωριστεί σε τέσσερεις «υποπίνακες», σε τέσσερα **μπλοκ**. Αν συμβολίσω αυτά τα μπλοκ (τους υποπίνακες) με

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

μπορώ ξαναεκφράσω τον A ως

$$\underset{5\times5}{A} = \begin{pmatrix} \underset{3\times2}{A_{11}} & \underset{3\times3}{A_{12}} \\ \underset{2\times2}{A_{21}} & \underset{2\times3}{A_{22}} \end{pmatrix}$$

Όταν γράφουμε έναν πίνακα σε μία τέτοια μορφή λέμε ότι είναι διαμερισμένος σε μπλοκ.

Το πώς (και αν) θα διαμερίσουμε έναν πίνακα σε μπλοκ εξαρτάται από το εκάστοτε πρόβλημα. Για παράδειγμα, ο ίδιος πίνακας θα μπορούσε να έχει διαμεριστεί με πάρα πολλούς διαφορετικούς τρόπους μερικοί από τους οποίους είναι οι ακόλουθοι:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -2 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 0 & 3 & 2 \\ \hline -2 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & -2 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -2 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right),$$

(και οι τρεις πίνακες είναι διαμερισμένοι σε τέσσερα μπλοκ όπως και στο αρχικό παράδειγμα)

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & -2 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -2 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

(εδώ οι πρώτοι δύο είναι διαμερισμένοι σε δύο και ο τρίτος σε έξι μπλοκ)

Αν χρησιμοποιούσαμε σύμβολα θα εκφράζαμε τους παραπάνω πίνακες ως

$$\begin{pmatrix} \underset{3\times 2}{A_{11}} & \underset{3\times 3}{A_{12}} \\ \underset{2\times 2}{A_{21}} & \underset{2\times 3}{A_{22}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \underset{1\times 3}{\underset{\sim}{a}'_{11}} & \underset{1\times 2}{\underset{\sim}{a}'_{12}} \\ \underset{4\times 3}{A_{21}} & \underset{4\times 2}{A_{22}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \underset{4\times 1}{\underset{\sim}{a}_{11}} & \underset{4\times 4}{A_{12}} \\ \underset{1\times 1}{a_{21}} & \underset{1\times 3}{\underset{\sim}{a}'_{22}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \underset{2\times 5}{A_{1}} \\ \underset{3\times 5}{A_{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \underset{5\times 3}{A_{1}} & \underset{5\times 2}{A_{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \underset{2\times 1}{\underset{\sim}{a}_{11}} & \underset{2\times 4}{A_{12}} \\ \underset{2\times 1}{\underset{\sim}{a}_{21}} & \underset{2\times 4}{A_{22}} \\ \underset{1\times 1}{a_{31}} & \underset{1\times 3}{\underset{\sim}{a}'_{32}} \end{pmatrix}$$

αντίστοιχα. (Τα μπλοκ A_{ij} και $\underset{\sim}{a}_{ij}$ συμβολίζουν κάτι άλλο σε κάθε διαμέριση.) Στον δεύτερο πίνακα έχω συμβολίσει το πάνω αριστερά μπλοκ με $\underset{\sim}{a}'_{11}$ μια και είναι ένας πίνακας-γραμμή. Το ίδιο έχω κάνει όπου χρειάζεται και στους υπόλοιπους πίνακες και μπλοκ.

Ο ανάστροφος ενός πίνακα διαμερισμένου σε μπλοκ μπορεί να εκφραστεί μέσω των αναστρόφων των μπλοκ. Για παράδειγμα, οι ανάστροφοι των προηγούμενων πινάκων είναι οι

$$\begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{21} \\ A'_{12} & A'_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_{11} & A'_{21} \\ \underset{\sim}{a}_{12} & A'_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}'_{11} & a_{21} \\ A'_{12} & \underset{\sim}{a}_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A'_{1} & A'_{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A'_{1} \\ A'_{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}'_{11} & \underset{\sim}{a}'_{21} & a_{31} \\ A'_{12} & A'_{22} & \underset{\sim}{a}_{32} \end{pmatrix}$$

Βλέπουμε ότι γίνονται δύο αναστροφές: Μία αναστροφή της διάταξης των μπλοκ και μία των μπλοκ των ίδιων. Αν το σκεφτείτε λίγο θα καταλάβετε γιατί. Θα σας βοηθήσει και το ακόλουθο παράδειγμα που αφορά στην αναστροφή ενός διανύσματος.

Έστω $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n)'$ ένα n-διάστατο διάνυσμα (πίνακας-στήλη) και $\underset{\sim}{x}_1 = (x_1, \ldots, x_k)'$ το διάνυσμα που αποτελείται από τα k πρωτα στοιχεία του και $\underset{\sim}{x}_2 = (x_{k+1}, \ldots, x_n)'$ το διάνυσμα που αποτελείται από τα $n-k$ τελευταία στοιχεία του. Τότε $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{x}_1 \\ \underset{\sim}{x}_2 \end{pmatrix}$ (έχει διαμεριστεί σε δύο μπλοκ) και προφανώς $\underset{\sim}{x}' = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{x}'_1 & \underset{\sim}{x}'_2 \end{pmatrix}$.

Στην πραγματικότητα πίνακες διαμερισμένους σε μπλοκ βλέπουμε από την αρχή του μαθήματος: Όταν εκφράζουμε έναν πίνακα $n \times m$ μέσω των στηλών του, π.χ. $\underset{n\times m}{A} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_1 & \underset{\sim}{a}_2 & \cdots & \underset{\sim}{a}_m \end{pmatrix}$ τον διαμερίζουμε σε m μπλοκ αφού κάθε στήλη είναι από μόνη της ένας πίνακας.

5.1 Πρόσθεση πινάκων διαμερισμένων σε μπλοκ

Όπως έχουμε ήδη πει, για να μπορούν να προστεθούν δύο πίνακες θα πρέπει να έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Αν δύο πίνακες ίδιων διαστάσεων είναι διαμερισμένοι σε μπλοκ επίσης ίδιων διαστάσεων τότε μπορούμε να εκφράσουμε το άθροισμά τους μέσω των μπλοκ.

Για παράδειγμα, έστω $\underset{n\times m}{A} = \begin{pmatrix} \underset{k\times \ell}{A_{11}} & \underset{k\times (m-\ell)}{A_{12}} \\ \underset{(n-k)\times \ell}{A_{21}} & \underset{(n-k)\times (m-\ell)}{A_{22}} \end{pmatrix}$, $\underset{n\times m}{B} = \begin{pmatrix} \underset{k\times \ell}{B_{11}} & \underset{k\times (m-\ell)}{B_{12}} \\ \underset{(n-k)\times \ell}{B_{21}} & \underset{(n-k)\times (m-\ell)}{B_{22}} \end{pmatrix}$ δύο πίνακες διαμερισμένοι σε μπλοκ ακριβώς ίδιων διαστάσεων. Τότε έχουμε

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix}$$

(Τονίζεται ότι επειδή οι πίνακες A, B είναι διαστάσεων $n \times m$ μπορούν να προστεθούν έτσι κι αλλιώς.)

5.2 Πολλαπλασιασμός μεταξύ πινάκων διαμερισμένων σε μπλοκ

Σε ό,τι ακολουθεί δεν ξεχνάμε τον κανόνα: Για να μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε δύο πίνακες το πλήθος των στηλών του πρώτου πρέπει να είναι το ίδιο με το πλήθος των γραμμών του δεύτερου.

Για να μπορούμε να εκφράσουμε το γινόμενο δύο πινάκων (που ικανοποιούν τον κανόνα για τον πολλαπλασιασμό) μέσω των μπλοκ στα οποία έχουν διαμεριστεί παριστάνουμε για λίγο ότι τα μπλοκ δεν είναι πίνακες αλλά απλά στοιχεία. Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ που είναι διαμερισμένος σε τέσσερα μπλοκ παριστάνουμε ότι αποτελείται από δύο «γραμμές» και δύο «στήλες», ο πίνακας $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}$ που είναι διαμερισμένος σε δύο μπλοκ παριστάνουμε ότι αποτελείται από μία «γραμμή» και δύο «στήλες» κ.ο.κ. Το γινόμενο εκφράζεται μέσω των μπλοκ εφ' όσον και αυτές οι «γραμμές» και «στήλες» ικανοποιούν τον κανόνα.

Τα ακόλουθα παραδείγματα θα βοηθήσουν να καταλάβετε:

- Έστω τα n-διάστατα διανύσματα $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n)', \underset{\sim}{y} = (y_1, \ldots, y_n)'$. Υποθέστε ότι τα διαμερίζουμε σε δύο μπλοκ-υποδιανύσματα το κάθε ένα με το πρώτο να αποτελείται από τα k πρώτα στοιχεία τους και το δεύτερο από τα υπόλοιπα $n-k$ στοιχεία τους: $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{x}_1 \\ \underset{\sim}{x}_2 \end{pmatrix}, \underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{y}_1 \\ \underset{\sim}{y}_2 \end{pmatrix}$ με $\underset{\sim}{x}_1 = (x_1, \ldots, x_k)', \underset{\sim}{x}_2 = (x_{k+1}, \ldots, x_n)'$ και $\underset{\sim}{y}_1 = (y_1, \ldots, y_k)', \underset{\sim}{y}_2 = (y_{k+1}, \ldots, y_n)'$. Τότε για το εσωτερικό γινόμενό τους ισχύει

$$\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{x}_1' & \underset{\sim}{x}_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underset{\sim}{y}_1 \\ \underset{\sim}{y}_2 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{x}_1'\underset{\sim}{y}_1 + \underset{\sim}{x}_2'\underset{\sim}{y}_2$$

  μια και

$$x_1y_1 + \cdots + x_ky_k + x_{k+1}y_{k+1} + \cdots + x_ny_n = (x_1y_1 + \cdots + x_ky_k) + (x_{k+1}y_{k+1} + \cdots + x_ny_n)$$

- Έστω $\underset{n\times m}{A} = \begin{pmatrix} \underset{k\times\ell}{A_{11}} & \underset{k\times(m-\ell)}{A_{12}} \\ \underset{(n-k)\times\ell}{A_{21}} & \underset{(n-k)\times(m-\ell)}{A_{22}} \end{pmatrix}, \underset{m\times r}{B} = \begin{pmatrix} \underset{\ell\times s}{B_{11}} & \underset{\ell\times(r-s)}{B_{12}} \\ \underset{(m-\ell)\times s}{B_{21}} & \underset{(m-\ell)\times(r-s)}{B_{22}} \end{pmatrix}$. Το γινόμενο AB έχει νόημα: είναι ένας πίνακας $n \times r$. Φανταστείτε ότι είχατε τους πίνακες 2×2 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Όπως ξέρουμε, το γινόμενο του πρώτου επί τον δεύτερο έχει νόημα και είναι

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

  Επιστρέψτε τώρα στους A και B που είναι διαμερισμένοι σε μπλοκ 2×2 (δύο «γραμμές» και δύο «στήλες»). Όπως και στους δύο «κανονικούς» πίνακες 2×2, έτσι και εδώ έχουμε

$$\underset{n\times r}{AB} = \begin{pmatrix} \underset{k\times s}{A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}} & \underset{k\times(r-s)}{A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}} \\ \underset{(n-k)\times s}{A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}} & \underset{(n-k)\times(r-s)}{A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}} \end{pmatrix}$$

  επειδή οι υποπίνακες-μπλοκ A_{ij}, B_{ij} έχουν διαστάσεις τέτοιες ώστε να έχουν νόημα όλα τα παραπάνω γινόμενα. (Αν οι διαστάσεις των μπλοκ δεν «ταίριαζαν» δεν θα μπορούσαμε να γράψουμε έτσι το γινόμενο AB.)

  Γιατί είναι σωστό αυτό; Θυμηθείτε ότι το στοιχείο ij του AB ισούται με το εσωτερικό γινόμενο της γραμμής i του A, έστω $\underset{\sim}{a}_i'$, με την στήλη j του B, έστω $\underset{\sim}{b}_j$. Η παραπάνω διαμέριση του A σε μπλοκ σπάει κάθε γραμμή σε δύο κομμάτια (μπλοκ): το πρώτο αποτελείται από τα πρώτα ℓ στοιχεία της και το δεύτερο από τα υπόλοιπα $m-\ell$ στοιχεία της: $\underset{\sim}{a}_i' = \begin{pmatrix}\underset{\sim}{a}_{i1}' & \underset{\sim}{a}_{i2}'\end{pmatrix}$. Αντίστοιχα, η διαμέριση του B σπάει κάθε στήλη σε δύο κομμάτια: το πρώτο αποτελείται από τα πρώτα ℓ στοιχεία της και το δεύτερο από τα υπόλοιπα $m-\ell$ στοιχεία της: $\underset{\sim}{b}_j = \begin{pmatrix}\underset{\sim}{b}_{j1} \\ \underset{\sim}{b}_{j2}\end{pmatrix}$. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα με τα $\underset{\sim}{x}$ και $\underset{\sim}{y}$ έχουμε $\underset{\sim}{a}_i'\underset{\sim}{b}_j = \underset{\sim}{a}_{i1}'\underset{\sim}{b}_{j1} + \underset{\sim}{a}_{i2}'\underset{\sim}{b}_{j2}$. Υποθέστε για ευκολία ότι $i \leqslant k$ (δηλαδή η i είναι μία από τις πρώτες k γραμμές του A) και $j \leqslant s$ (δηλαδή η j είναι μία από τις πρώτες s στήλες του B). Τότε η $\underset{\sim}{a}_{i1}'$ είναι η γραμμή i του A_{11}, η $\underset{\sim}{a}_{i2}'$ είναι η γραμμή i του A_{12}, η $\underset{\sim}{b}_{j1}$ είναι η στήλη j του B_{11}, και η $\underset{\sim}{b}_{j2}$ είναι η στήλη j του B_{21}. (Το βλέπετε;) Επομένως το στοιχείο ij του $A_{11}B_{11}$ είναι $\underset{\sim}{a}_{i1}'\underset{\sim}{b}_{j1}$ ενώ το στοιχείο ij του $A_{12}B_{12}$ είναι $\underset{\sim}{a}_{i2}'\underset{\sim}{b}_{j2}$. Προσθέτοντας βλέπουμε ότι το στοιχείο ij του $A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12}$ είναι $\underset{\sim}{a}_{i1}'\underset{\sim}{b}_{j1} + \underset{\sim}{a}_{i2}'\underset{\sim}{b}_{j2}$, δηλαδή το στοιχείο ij του AB και επομένως συμπεραίνουμε ότι ο $A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12}$ περιέχει τα στοιχεία των πρώτων k γραμμών και πρώτων s στηλών του AB. Με τον ίδιο τρόπο μπορείτε να δείτε πώς δημιουργούνται και τα υπόλοιπα μπλοκ του γινομένου.

- Έστω $\underset{n\times m}{A}, \underset{m\times \ell}{B} = \begin{pmatrix}\underset{m\times k}{B_1} & \underset{m\times(\ell-k)}{B_2}\end{pmatrix}$. Τοτε το γινόμενο AB έχει νόημα και ισχύει $\underset{n\times\ell}{AB} = \begin{pmatrix}\underset{n\times k}{AB_1} & \underset{n\times(\ell-k)}{AB_2}\end{pmatrix}$. Μπορείτε να δείτε γιατί; Ειδικότερα, αν $\underset{\sim}{b}_1, \underset{\sim}{b}_2, \ldots, \underset{\sim}{b}_\ell$ είναι οι στήλες του B τότε $AB = \begin{pmatrix}A\underset{\sim}{b}_1 & A\underset{\sim}{b}_2 & \cdots & A\underset{\sim}{b}_\ell\end{pmatrix}$.

- Έστω $\underset{n\times m}{A} = \begin{pmatrix}\underset{n\times k}{A_1} & \underset{n\times(m-k)}{A_2}\end{pmatrix}, \underset{m\times\ell}{B} = \begin{pmatrix}\underset{k\times\ell}{B_1} \\ \underset{(m-k)\times\ell}{B_2}\end{pmatrix}$. Τοτε το γινόμενο AB έχει νόημα και ισχύει $\underset{n\times\ell}{AB} = A_1B_1 + A_2B_2$. Μπορείτε να δείτε γιατί; Επίσης, αν $\underset{n\times m}{A} = \begin{pmatrix}\underset{\sim}{a}_1 & \underset{\sim}{a}_2 & \cdots & \underset{\sim}{a}_m\end{pmatrix}$ και $\underset{m\times 1}{\underset{\sim}{c}} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)'$ τότε

$$A\underset{\sim}{c} = \begin{pmatrix}\underset{\sim}{a}_1 & \underset{\sim}{a}_2 & \cdots & \underset{\sim}{a}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m\end{pmatrix} = c_1\underset{\sim}{a}_1 + c_2\underset{\sim}{a}_2 + \cdots + c_m\underset{\sim}{a}_m = \sum_{i=1}^m c_i\underset{\sim}{a}_i$$

- Έστω $\underset{n\times m}{A} = \begin{pmatrix}\underset{k\times m}{A_1} \\ \underset{(n-k)\times m}{A_2}\end{pmatrix}, \underset{m\times\ell}{B}$. Τότε το γινόμενο AB έχει νόημα και ισχύει $\underset{n\times\ell}{AB} = \begin{pmatrix}\underset{k\times\ell}{A_1B} \\ \underset{(n-k)\times\ell}{A_2B}\end{pmatrix}$. Μπορείτε να δείτε γιατί; Ειδικότερα, αν το $\underset{\sim}{x}$ είναι ένα m-διάστατο διάνυσμα (πίνακας $m\times 1$) τότε $A\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix}A_1\underset{\sim}{x} \\ A_2\underset{\sim}{x}\end{pmatrix}$.

- Έστω $\underset{n\times m}{A} = \begin{pmatrix}\underset{k\times m}{A_1} \\ \underset{(n-k)\times m}{A_2}\end{pmatrix}, \underset{m\times\ell}{B} = \begin{pmatrix}\underset{m\times s}{B_1} & \underset{m\times(\ell-s)}{B_2}\end{pmatrix}$. Τότε το γινόμενο AB έχει νόημα και ισχύει $\underset{n\times\ell}{AB} = \begin{pmatrix}\underset{k\times s}{A_1B_1} & \underset{k\times(\ell-s)}{A_1B_2} \\ \underset{(n-k)\times s}{A_2B_1} & \underset{(n-k)\times(\ell-s)}{A_2B_2}\end{pmatrix}$. Μπορείτε να δείτε γιατί;

Φυσικά δεν είναι δυνατόν να εξαντληθούν όλες οι περιπτώσεις αλλά τα παραπάνω παραδείγματα δίνουν μια ιδέα.

5.3 Μπλοκ-διαγώνιοι πίνακες

Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται μπλοκ-διαγώνιος αν τα μπλοκ που περιέχουν την κύρια διαγώνιό του είναι τετραγωνικοί πίνακες και τα υπόλοιπα μπλοκ είναι μηδενικοί. Για παράδειγμα, οι ακόλουθοι πίνακες είναι μπλοκ-διαγώνιοι:

$\begin{pmatrix} \underset{k\times k}{A} & \underset{k\times \ell}{\mathrm{O}} \\ \underset{\ell\times k}{\mathrm{O}} & \underset{\ell\times \ell}{B} \end{pmatrix}$ (ο πίνακας είναι διαστάσεων $(k+\ell)\times(k+\ell)$, δηλαδή τετραγωνικός, η κύρια διαγώνιος περιέχεται στα μπλοκ A και B που είναι τετραγωνικοί πίνακες και όλα τα μη διαγώνια μπλοκ είναι μηδενικοί πίνακες.)

$\left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$ (μία απλή περίπτωση του προηγούμενου πίνακα με $k=1, \ell=2$)

$\left(\begin{array}{ccc|cc} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$ (μία άλλη περίπτωση με $k=3, \ell=2$)

$\begin{pmatrix} \underset{k\times k}{A_{11}} & \underset{k\times\ell}{\mathrm{O}} & \underset{k\times(n-k-\ell)}{\mathrm{O}} \\ \underset{\ell\times k}{\mathrm{O}} & \underset{\ell\times\ell}{A_{22}} & \underset{\ell\times(n-k-\ell)}{\mathrm{O}} \\ \underset{(n-k-\ell)\times k}{\mathrm{O}} & \underset{(n-k-\ell)\times\ell}{\mathrm{O}} & \underset{(n-k-\ell)\times(n-k-\ell)}{A_{33}} \end{pmatrix}$ (ένας μπλοκ-διαγώνιος πίνακας διαστάσεων $n\times n$)

Το ίχνος ενός μπλοκ-διαγώνιου πίνακα ισούται με το άθροισμα των ιχνών των διαγωνίων μπλοκ του. Μπορείτε να το δείτε;

Η ορίζουσα ενός μπλοκ-διαγώνιου πίνακα ισούται με το γινόμενο των οριζουσών των διαγωνίων μπλοκ του. Μπορείτε να το δείτε;

Ένας μπλοκ-διαγώνιος πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν όλα τα διαγώνια μπλοκ του είναι αντιστρέψιμοι πίνακες. Ο αντίστροφος ενός μπλοκ-διαγώνιου πίνακα είναι επίσης μπλοκ-διαγώνιος με διαγώνια μπλοκ τους αντιστρόφους των διαγωνίων μπλοκ του. Για παράδειγμα, αν οι $\underset{k\times k}{A}, \underset{\ell\times\ell}{B}$ είναι αντιστρέψιμοι τότε

$$\begin{pmatrix} A & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & B^{-1} \end{pmatrix}$$

5.4 Μπλοκ-τριγωνικοί πίνακες

Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται μπλοκ-άνω τριγωνικός αν τα μπλοκ που περιέχουν την κύρια διαγώνιό του είναι τετραγωνικοί πίνακες και όλα τα μπλοκ κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικοί.

Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται μπλοκ-κάτω τριγωνικός αν τα μπλοκ που περιέχουν την κύρια διαγώνιό του είναι τετραγωνικοί πίνακες και όλα τα μπλοκ πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικοί.

Για παράδειγμα, οι ακόλουθοι πίνακες είναι μπλοκ-τριγωνικοί:

$$\begin{pmatrix} \underset{k\times k}{A} & \underset{k\times \ell}{B} \\ \underset{\ell\times k}{\mathrm{O}} & \underset{\ell\times \ell}{C} \end{pmatrix} \quad \text{(μπλοκ-άνω τριγωνικός)}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \text{(επίσης μπλοκ-άνω τριγωνικός)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{(και ένας μπλοκ-κάτω τριγωνικός)}$$

Το ίχνος ενός μπλοκ-τριγωνικού πίνακα ισούται με το άθροισμα των ιχνών των διαγωνίων μπλοκ του. Μπορείτε να το δείτε;

Η ορίζουσα ενός μπλοκ-τριγωνικού πίνακα ισούται με το γινόμενο των οριζουσών των διαγωνίων μπλοκ του. Μπορείτε να το δείτε;

Ο ανάστροφος ενός μπλοκ-άνω τριγωνικού πίνακα είναι μπλοκ-κάτω τριγωνικός και το αντίστροφο. Μπορείτε να το δείτε;

5.5 Μερικά αποτελέσματα με πίνακες διαμερισμένους σε μπλοκ

Έστω

$$\begin{pmatrix} \underset{k\times k}{A} & \underset{k\times \ell}{B} \\ \underset{\ell\times k}{C} & \underset{\ell\times \ell}{D} \end{pmatrix}$$

ένας τετραγωνικός πίνακας $(k+\ell)\times(k+\ell)$ διαμερισμένος σε μπλοκ με τα διαγώνια μπλοκ να είναι επίσης τετραγωνικοί πίνακες.

Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος τότε

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|.$$

Αν ο πίνακας D είναι αντιστρέψιμος τότε

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D||A - BD^{-1}C|.$$

Θα δείξω μόνο το πρώτο. Το δεύτερο το αφήνω για εσάς.

Ο πίνακας $\begin{pmatrix} I_k & \underset{k\times \ell}{\mathrm{O}} \\ -CA^{-1} & I_\ell \end{pmatrix}$ είναι μπλοκ-κάτω τριγωνικός επομένως η ορίζουσά του ισούται με το γινόμενο των οριζουσών των διαγωνίων μπλοκ του. Τα διαγώνια μπλοκ του είναι μοναδιαίοι πίνακες που έχουν ορίζουσα ένα, άρα η ορίζουσά του ισούται με τη μονάδα. Ισχύει

$$\begin{pmatrix} I_k & \mathrm{O} \\ -CA^{-1} & I_\ell \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_kA + \mathrm{O}C & I_kB + \mathrm{O}D \\ -CA^{-1}A + I_\ell C & -CA^{-1}B + I_\ell D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathrm{O} & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

Επειδή η ορίζουσα γινομένου πινάκων ισούται με το γινόμενο των οριζουσών τους, η ορίζουσα του γινομένου στο αριστερό μέλος της παραπάνω γραμμής ισούται με $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$ (μια και ο πρώτος πίνακας έχει ορίζουσα ένα όπως είπαμε πιο πάνω). Στο δεξί μέλος της παραπάνω γραμμής βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα του γινομένου είναι ένας μπλοκ-άνω τριγωνικός πίνακας επομένως η ορίζουσά του ισούται με $|A||D - CA^{-1}B|$ και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Θα χρησιμοποιήσω τώρα αυτό που αποδείξαμε για να δείξω ένα περίεργο αποτέλεσμα για ορίζουσες. Έστω $\underset{n\times m}{A}$, $\underset{m\times n}{B}$ πίνακες τέτοιοι ώστε να έχουν νόημα τα γινόμενα AB και BA οι οποίοι είναι τετραγωνικοί πίνακες. Ισχύει ότι

$$|I_n + AB| = |I_m + BA|.$$

Για να δούμε γιατί ας θεωρήσουμε τον πίνακα διαστάσεων $(n+m)\times(n+m)$ $\begin{pmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix}$. Τα διαγώνια μπλοκ του είναι τετραγωνικοί πίνακες (οι δύο μοναδιαίοι) που είναι αντιστρέψιμοι. Επομένως, εφαρμόζοντας τους τύπους για την ορίζουσα που αποδείξαμε παραπάνω (εγώ τον πρώτο και εσείς τον δεύτερο) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} &= |I_n||I_m + BI_n^{-1}A| = |I_m + BA| \quad \text{(από τον πρώτο)} \\ &= |I_m||I_n + AI_m^{-1}B| = |I_n + AB| \quad \text{(από τον δεύτερο)} \end{aligned}$$

6 Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Τα συστήματα γραμμικών εξισώσεων είναι σύνολα πρωτοβάθμιων εξισώσεων που πρέπει να λυθούν ταυτόχρονα. Με τον όρο «πρωτοβάθμια εξίσωση» εννοούμε μία εξίσωση που όλοι οι άγνωστοι εμφανίζονται στην πρώτη δύναμη και δεν πολλαπλασιάζονται μεταξύ τους. Συχνά αναφερόμαστε στα συστήματα γραμμικών εξισώσεων και με τον συντομότερο όρο *γραμμικά συστήματα*.

Από τις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου γνωρίζετε συστήματα γραμμικών εξισώσεων όπως το ακόλουθο:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ x + y &= 5 \end{aligned}$$

Αυτό είναι ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και η επίλυσή του μπορεί να γίνει με πολλούς διαφορετικούς τρόπους:

(α) Μέσω αντικατάστασης, δηλαδή λύνοντας την μία εξίσωση ως προς τον έναν άγνωστο, αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην άλλη, λύνοντάς την (μια και γίνεται εξίσωση με έναν άγνωστο), και μετά αντικαθιστώντας την λύση στην πρώτη και λύνοντας και ως προς τον δεύτερο. Για παράδειγμα, στο παραπάνω σύστημα μπορούμε να λύσουμε την πρώτη εξίσωση ως προς y και να βρούμε $y = 2x - 4$, μετά να αντικαταστήσουμε το y στην δεύτερη με αυτό που βρήκαμε για να γίνει $x + (2x - 4) = 5 \Leftrightarrow 3x = 9$ και να πάρουμε $x = 3$, και τέλος να αντικαταστήσουμε αυτήν την τιμή στην πρώτη ώστε να πάρουμε $y = 2(3) - 4 = 2$: Η λύση του συστήματος είναι $(x, y) = (3, 2)$ (δηλαδή $x = 3, y = 2$). Φυσικά, δεν έχει σημασία για το αποτέλεσμα από ποια εξίσωση και ποια μεταβλητή θα ξεκινήσουμε· ξεκινάμε από όπου μας βολεύει. Αν για παράδειγμα κάποιον βόλευε περισσότερο να ξεκινήσει από την δεύτερη και να λύσει ως προς x τότε θα έπαιρνε $x = 5 - y$ και μετά $2(5-y) - y = 4 \Leftrightarrow 10 - 3y = 4 \Leftrightarrow 3y = 6 \Leftrightarrow y = 2$ και $x + 2 = 5 \Leftrightarrow x = 3$ ώστε να καταλήξει ξανά στην λύση $(x, y) = (3, 2)$.

(β) Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, ενδεχομένως πολλαπλασιάζοντας πρώτα την μία κατά μέλη με έναν αριθμό διαφορετικό από το μηδέν, λύνοντας την εξίσωση που προκύπτει και μετά αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα σε μία από τις αρχικές. Για παράδειγμα, αν προσθέσουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις έτσι όπως είναι, παίρνουμε $(2x-y)+(x+y) = 4+5 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$ και μετά $3+y = 5 \Leftrightarrow y = 2$. Θα μπορούσαμε να κάνουμε το ίδιο ξεκινώντας με πολλαπλασιασμό της δεύτερης εξίσωσης κατά μέλη με το -2 έτσι ώστε να γίνει $-2x-2y = -10$, να προσθέσουμε αυτήν κατά μέλη με την πρώτη ώστε να πάρουμε $(2x-y)+(-2x-2y) = 4-10 \Leftrightarrow -3y = -6 \Leftrightarrow y = 2$ και μετά να αντικαταστήσουμε αυτό σε μία από τις δύο και να λύσουμε ώστε να πάρουμε και $x = 3$.

(γ) Χρησιμοποιώντας την μέθοδο «με τις ορίζουσες». Η λύση του συστήματος είναι $(x, y) = (D_x/D, D_y/D)$ όπου D είναι η ορίζουσα «των συντελεστών των αγνώστων», D_x είναι η ορίζουσα που προκύπτει αν αντικατασταθούν στην ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων οι συντελεστές του x με τους σταθερούς όρους του συστήματος, και D_y είναι η ορίζουσα που προκύπτει αν αντικασταθούν στην ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων οι συντελεστές του y με τους σταθερούς όρους του συστήματος. Για παράδειγμα εδώ έχουμε $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1)-(-1)(1) = 2+1 = 3$, $D_x = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (4)(1)-(-1)(5) = 4+5 = 9$ (αντικαταστήσαμε τους συντελεστές 2 και 1 του x με τις σταθερές 4 και 5), $D_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (2)(5)-(4)(1) = 10-4 = 6$ (αντικαταστήσαμε τους συντελεστές -1 και 1 του y με τις σταθερές 4 και 5). Η λύση του συστήματος είναι $(x, y) = (D_x/D, D_y/D) = (9/3, 6/3) = (3, 2)$.

Στο παραπάνω παράδειγμα έχουμε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους. Στην ενότητα αυτή θα συζητήσουμε το γενικό πρόβλημα επίλυσης n εξισώσεων με m αγνώστους. (Γενικά, το πλήθος των εξισώσεων δεν είναι απαραίτητο να είναι το ίδιο με το πλήθος των αγνώστων· μπορεί οι εξισώσεις να είναι λιγότερες ή και περισσότερες.) Η γενική μορφή ενός τέτοιου συστήματος είναι

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

όπου $x_1, \ldots, x_m$ είναι οι άγνωστοι, a_{ij}, $i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$ είναι οι συντελεστές των αγνώστων, και $b_1, \ldots, b_n$ είναι οι σταθεροί όροι. Οι παραπάνω n εξισώσεις μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ή, πιο συνοπτικά,

$$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$$

όπου $\underset{n\times m}{A} = (a_{ij})$ είναι ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_m)'$ είναι το m-διάστατο διάνυσμα των αγνώστων, και $\underset{\sim}{b} = (b_1, \ldots, b_n)'$ είναι το n-διάστατο διάνυσμα των σταθερών όρων. Για παράδειγμα, το σύστημα που είδαμε στην αρχή αυτής της ενότητας γράφεται σε μορφή πινάκων ως

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Αν όλοι οι σταθεροί όροι ενός γραμμικού συστήματος είναι ίσοι με μηδέν, αν δηλαδή $\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{0}$, τότε το σύστημα λέμε ότι είναι **ομογενές**. Σε διαφορετική περίπτωση, αν δηλαδή έστω και ένας από τους σταθερούς όρους είναι διαφορετικός του μηδενός, λέμε ότι είναι **μη ομογενές**. Για παράδειγμα, το σύστημα

$$\begin{array}{rcl} -3x_1+4x_2 \qquad - x_4 &=& 2 \\ - x_2+3x_3+2x_4 &=& -1 \\ x_1-2x_2+ x_3+ x_4 &=& 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

είναι μη ομογενές ενώ το σύστημα

$$\begin{array}{rcl} 2y_1- y_2+2y_3 &=& 0 \\ y_1+3y_2 \qquad &=& 0 \\ -2y_2+3y_3 &=& 0 \\ y_1+ y_2+ y_3 &=& 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

είναι ομογενές. *Κάθε* ομογενές σύστημα έχει τουλάχιστον μία λύση, το μηδενικό διάνυσμα. Πράγματι, το σύστημα $\underset{n\times m}{A}\ \underset{m\times 1}{\underset{\sim}{x}} = \underset{n\times 1}{\underset{\sim}{0}}$ έχει λύση το διάνυσμα $\underset{\sim}{x} = \underset{m\times 1}{\underset{\sim}{0}}$ για οποιαδήποτε n (πλήθος εξισώσεων) και m (πλήθος αγνώστων) μια και $A\underset{\sim}{0} = \underset{\sim}{0}$. Επειδή λοιπόν το διάνυσμα $\underset{\sim}{0}$ (με την κατάλληλη διάσταση) είναι πάντα λύση ενός ομογενούς συστήματος αναφερόμαστε σε αυτό ως **τετριμμένη λύση**.

Ένα γραμμικό σύστημα μπορεί να έχει μία και μοναδική λύση, μπορεί να έχει άπειρες λύσεις ή μπορεί να μην έχει καμμία λύση. Για παράδειγμα, το σύστημα

$$\begin{array}{rcl} x_1- x_2+2x_3 &=& 1 \\ 2x_1+3x_2- x_3 &=& 3 \\ x_1+4x_2-3x_3 &=& 2 \end{array}$$

έχει άπειρες λύσεις. Ας το λύσουμε με την μέθοδο της αντικατάστασης για να το δούμε. Λύνοντας ως προς x_1 την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $x_1 = 1 + x_2 - 2x_3$. Αντικαθιστώντας το στην δεύτερη εξίσωση παίρνουμε $2(1 + x_2 - 2x_3) + 3x_2 - x_3 = 3 \Leftrightarrow 5x_2 - 5x_3 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1/5 + x_3$, άρα $x_1 = 1+(1/5+x_3)-2x_3 = 6/5-x_3$. Αντικαθιστώντας τα x_1 και x_2 στην τρίτη εξίσωση παίρνουμε $(6/5 - x_3) + 4(x_3 + 1/5) - 3x_3 = 2 \Leftrightarrow 0x_3 = 0$ που ισχύει πάντα. Επομένως συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις οι οποίες έχουν την μορφή $(x_1, x_2, x_3)' = (6/5 - x_3, 1/5 + x_3, x_3)'$ με $x_3 \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε τιμή και αν δώσουμε στο x_3 θα πάρουμε μία λύση: Για $x_3 = 0$ παίρνουμε την λύση $(6/5, 1/5, 0)'$· για $x_3 = 1$ παίρνουμε την λύση $(6/5 - 1, 1/5 + 1, 1)' = (1/5, 6/5, 1)'$· για $x_3 = -1/3$ παίρνουμε την $(6/5+1/3, 1/5-1/3, -1/3)' = (23/15, -2/15, -1/3)'$ κ.ο.κ. Από την άλλη πλευρά, το σύστημα

$$\begin{array}{rcl} x_1- x_2+2x_3 &=& 1 \\ 2x_1+3x_2- x_3 &=& 3 \\ x_1+4x_2-3x_3 &=& 1 \end{array}$$

δεν έχει λύσεις. Για να το δούμε αυτό ας κάνουμε ακριβώς τα ίδια με προηγουμένως (το σύστημα είναι όπως το προηγούμενο με μόνη διαφορά στον σταθερό όρο της τρίτης εξίσωσης) μέχρι το σημείο της επίλυσης της τρίτης εξίσωσης. Όταν αντικαταστήσουμε σε αυτήν τα x_1 και x_2 θα πάρουμε $(6/5 - x_3) + 4(x_3 + 1/5) - 3x_3 = 1 \Leftrightarrow 0x_3 = -1$ που είναι αδύνατον. Επομένως το σύστημα δεν ικανοποιείται από κανένα διάνυσμα $(x_1, x_2, x_3)'$.

Η μέθοδος της αντικατάστασης είναι η πιο απλή που μπορεί να σκεφτεί κανείς και μπορούμε να την εφαρμόζουμε εφ' όσον το επιθυμούμε για να λύσουμε ένα σύστημα. Έχει όμως το εξής μειονέκτημα: Δεν μπορεί εκ των προτέρων να μας πληροφορήσει αν το σύστημα έχει λύσεις ή όχι και σε περίπτωση που έχει κάποια λύση αν αυτή είναι μοναδική. Θα δούμε στη συνέχεια δύο μεθόδους: την απαλοιφή Gauss που είναι για κάθε περίπτωση και πρέπει να την προσέξετε ιδιαίτερα γιατί από δω και στο εξής θα την χρησιμοποιούμε συχνά και τον κανόνα του Cramer που είναι αποκλειστικά για τετραγωνικά συστήματα (όπου το πλήθος εξισώσεων συμπίπτει με των αγνώστων) και δίνει τον τύπο της λύσης σε περίπτωση που αυτή υπάρχει και είναι μοναδική.

Η **απαλοιφή Gauss** (Gaussian elimination) είναι μία γενική μέθοδος επίλυσης γραμμικών συστημάτων. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για όλους τους τύπους των γραμμικών συστημάτων (ομογενών και μη ομογενών, με ίδιο και με διαφορετικό πλήθος εξισώσεων και αγνώστων) και εφαρμόζει μία σειρά κατάλληλων μετασχηματισμών στον πίνακα των συντελεστών του συστήματος και στο διάνυσμα των σταθερών όρων, κάθε ένας εκ των οποίων δίνει ένα νέο σύστημα που είναι ισοδύναμο με το αρχικό. Όταν ολοκληρωθεί η ακολουθία των μετασχηματισμών καταλήγουμε σε ένα σύστημα που δίνει άμεσα όλες τις λύσεις του συστήματος, εφ' όσον βέβαια υπάρχουν. Πιο συγκεκριμένα, οι εν λόγω μετασχηματισμοί γίνονται στον **επαυξημένο πίνακα** του συστήματος που είναι ο πίνακας των συντελεστών με μία επί πλέον στήλη, το διάνυσμα των σταθερών όρων. Για παράδειγμα, το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2-\ x_3 &= 3 \\ x_1-\ x_2+2x_3 &= -6 \\ -x_1+2x_2+\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

με πίνακα συντελεστών $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ και διάνυσμα σταθερών όρων $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ έχει επαυξημένο πίνακα

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -6 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Στον επαυξημένο πίνακα ενός συστήματος συνηθίζουμε να χωρίζουμε τους συντελεστές από τους σταθερούς όρους με μία κάθετη γραμμή.

Οι μετασχηματισμοί που κάνουμε στον επαυξημένο πίνακα κατά την απαλοιφή Gauss είναι τριών ειδών:

1. Αμοιβαία εναλλαγή γραμμών.
2. Πολλαπλασιασμός κάποιας γραμμής με μία μη μηδενική σταθερά.
3. Πρόσθεση σε μία γραμμή ενός πολλαπλασίου μίας άλλης.

Ο πίνακας που προκύπτει εφαρμόζοντας τέτοιους μετασχηματισμούς είναι ο επαυξημένος πίνακας *ενός ισοδύναμου συστήματος*:

- Ο πρώτος μετασχηματισμός απλώς αλλάζει τη σειρά των εξισώσεων. Αν στον επαυξημένο πίνακα του παραδείγματος εναλλάξουμε μεταξύ τους την πρώτη και την δεύτερη γραμμή αυτός γίνεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{που είναι ο επαυξημένος πίνακας του (ισοδύναμου με το αρχικό) συστήματος} \quad \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 2x_3 & = & -6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 1 \end{array}$$

- Ο δεύτερος μετασχηματισμός πολλαπλασιάζει κατά μέλη μία εξίσωση με έναν μη μηδενικό αριθμό. Αν στον επαυξημένο πίνακα του παραδείγματος πολλαπλασιάσουμε την τρίτη γραμμή με -2 αυτός γίνεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -6 \\ 2 & -4 & -2 & -2 \end{array}\right) \quad \text{που είναι ο επαυξημένος πίνακας του (ισοδύναμου με το αρχικό) συστήματος} \quad \begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 & = & -6 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 & = & -2 \end{array}$$

- Ο τρίτος μετασχηματισμός προσθέτει κατά μέλη δύο εξισώσεις αφού πρώτα πολλαπλασιάσει την μία κατά μέλη με έναν αριθμό. Αν στον επαυξημένο πίνακα του παραδείγματος προσθέσουμε στην τρίτη γραμμή το διπλάσιο της πρώτης αυτός γίνεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -6 \\ 3 & 8 & -1 & 7 \end{array}\right) \quad \text{που είναι ο επαυξημένος πίνακας του (ισοδύναμου με το αρχικό) συστήματος} \quad \begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 & = & -6 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 & = & 7 \end{array}$$

Στη συνέχεια, την αμοιβαία εναλλαγή των γραμμών i και j θα την συμβολίζουμε με $r_i \leftrightarrow r_j$. Τον πολλαπλασιασμό της γραμμής i με την σταθερά c θα τον συμβολίζουμε με $r_i \to cr_i$. Την πρόσθεση στην γραμμή i της γραμμής j πολλαπλασιασμένης επί c θα την συμβολίζουμε με $r_i \to r_i + cr_j$. Για παράδειγμα, τους τρεις μετασχηματισμούς που κάναμε στον παραπάνω επαυξημένο πίνακα θα τους συμβολίζαμε με $r_1 \leftrightarrow r_2$, $r_3 \to -2r_3$, $r_3 \to r_3 + 2r_1$, αντίστοιχα.

Ο σκοπός μας είναι να εφαρμόσουμε μία τέτοια ακολουθία μετασχηματισμών ώστε ο πίνακας των συντελεστών (δηλαδή το μπλοκ του επαυξημένου πίνακα που είναι αριστερά της κάθετης γραμμής) να καταλήξει σε **μορφή echelon**. Ένας πίνακας λέμε ότι είναι σε μορφή echelon αν συμβαίνουν τα ακόλουθα:

- Οι μη μηδενικές γραμμές προηγούνται των μηδενικών (αν υπάρχουν).
- Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι η μονάδα.
- Μεταξύ δύο μη μηδενικών γραμμών προηγείται εκείνη που έχει την μονάδα αριστερότερα.
- Τα υπόλοιπα στοιχεία μίας στήλης που περιέχει την πρώτη μονάδα μίας γραμμής είναι μηδέν.

Για να καταλάβουμε καλύτερα τι εννοούν οι παραπάνω «κανόνες» ας δούμε μερικά παραδείγματα.

(α) Ο ακόλουθος πίνακας είναι σε μορφή echlelon:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Έχει τέσσερεις γραμμές εκ των οποίων οι τρεις είναι μη μηδενικές και προηγούνται της μίας μηδενικής.
- Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι 1.
- Μεταξύ των μη μηδενικών γραμμών προηγούνται αυτές που έχουν το 1 αριστερότερα: η πρώτη γραμμή έχει το 1 στην πρώτη θέση, η δεύτερη το έχει στην δεύτερη (δηλαδή δεξιότερα από την πρώτη), και η τρίτη το έχει στην τέταρτη (δηλαδή δεξιότερα από την δεύτερη).
- Τα υπόλοιπα στοιχεία των στηλών που έχουν τα πρώτα 1 των μη μηδενικών γραμμών είναι μηδέν: Η πρώτη στήλη έχει το 1 της πρώτης γραμμής και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία 0, η δεύτερη στήλη έχει το 1 της δεύτερης γραμμής και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία 0, και η τέταρτη στήλη έχει το 1 της τρίτης γραμμής και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία 0.

(β) Οι παρακάτω πίνακες είναι επίσης σε μορφή echelon:

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&-1&-1&0&1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Μπορείτε να το δείτε επιβεβαιώνοντας ότι πληρούν τις ιδιότητες της μορφής;

Ένα σύστημα με πίνακα συντελεστών που είναι σε μορφή echelon είναι σχεδόν λυμένο. Πάρτε ως παράδειγμα τον πίνακα του (α) ως πίνακα συντελεστών του συστήματος

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned}x_1 - x_3 &= b_1\\ x_2 &= b_2\\ x_4 - 2x_5 &= b_3\\ 0 &= b_4\end{aligned}$$

όπου b_1, b_2, b_3, b_4 είναι δεδομένες σταθερές. Η εξίσωση που αντιστοιχεί στην μηδενική γραμμή (την τελευταία του πίνακα) είναι η $0 = b_4$ και μας πληροφορεί αμέσως αν το σύστημα έχει λύσεις: Αν η σταθερά b_4 ισούται με μηδέν τότε η εξίσωση είναι η $0 = 0$ (ακριβέστερα, η $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$) που ισχύει πάντοτε, επομένως το σύστημα έχει λύσεις. Αν όμως $b_4 \neq 0$ τότε η τελευταία εξίσωση δεν μπορεί να ισχύει, επομένως το σύστημα δεν έχει λύσεις. (Αν η μορφή echelon έχει περισσότερες μηδενικές γραμμές θα πρέπει οι αντίστοιχοι σταθεροί όροι να είναι όλοι μηδέν προκειμένου το σύστημα να έχει λύσεις.) Στην περίπτωση λοιπόν που $b_4 = 0$ οι λύσεις ικανοποιούν $x_1 = b_1 + x_3$ (πρώτη εξίσωση-γραμμή), $x_2 = b_2$ (δεύτερη εξίσωση-γραμμή), $x_4 = b_3 + 2x_5$ (τρίτη εξίσωση-γραμμή), δηλαδή είναι όλα τα διανύσματα της μορφής $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)' = (b_1 + x_3, b_2, x_3, b_3 + 2x_5, x_5)'$ με $x_3, x_5 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετα.

Ως άσκηση, δείξτε ότι τα σύνολα λύσεων των συστημάτων με πίνακες συντελεστών τους πέντε πίνακες του παραδείγματος (β) και διανύσματα σταθερών όρων $(b_1, b_2, \ldots)'$ (κατάλληλης διάστασης κάθε φορά είναι τα ακόλουθα: (i) $(x_1, x_2, x_3)' = (b_1 + x_3, b_2, x_3)'$ με $x_3 \in \mathbb{R}$· (ii) $(x_1, x_2, x_3, x_4)' = (b_1, b_2, b_3, b_4)'$ (εδώ έχουμε μοναδική λύση)· (iii) $(x_1, x_2, x_3, x_4)' = (b_1, b_2 - 2x_3, x_3, b_3)'$ με $x_3 \in \mathbb{R}$· (iv) $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)' = (b_1 + x_2 + x_3 - x_5, x_2, x_3, b_2 + x_5, x_5)'$ με $x_2, x_3, x_5 \in \mathbb{R}$ υπό την προϋπόθεση ότι $b_3 = 0$, διαφορετικά δεν υπάρχει λύση· (v) $(x_1, x_2, x_3)' = (b_1, b_2, x_3)'$ με $x_3 \in \mathbb{R}$ υπό την προϋπόθεση ότι $b_3 = b_4 = 0$, διαφορετικά δεν υπάρχει λύση.

Τώρα που είδαμε πόσο εύκολα λύνεται ένα γραμμικό σύστημα όταν ο πίνακας των συντελεστών είναι σε μορφή echelon καταλαβαίνουμε γιατί είναι βολικό το να φέρουμε μέσω μετασχηματισμών τον πίνακα των συντελεστών οποιουδήποτε γραμμικού συστήματος σε τέτοια μορφή. Ας δούμε πώς το κάνουμε αυτό.

Πρώτος στόχος είναι να εμφανίσουμε τη μονάδα στη θέση 11 (ένα ένα), είτε εναλλάσσοντας μεταξύ τους γραμμές είτε διαιρώντας την πρώτη γραμμή με ό,τι χρειάζεται είτε προσθέτοντας στην πρώτη γραμμή ένα πολλαπλάσιο κάποιας άλλης. Αφού το κάνουμε αυτό, μηδενίζουμε όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της πρώτης στήλης προσθέτοντας σε όλες τις γραμμές από την δεύτερη έως την τελευταία κατάλληλα πολλαπλάσια της πρώτης.

Ας το δούμε αυτό σε ένα παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -6 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Για να εμφανίσουμε τη μονάδα στη θέση 11 (εκεί που είναι τώρα το 2) στον συγκεκριμένο πίνακα μπορούμε είτε να εναλλάξουμε μεταξύ τους τις δύο πρώτες γραμμές (μια και η δεύτερη γραμμή την έχει έτοιμη την μονάδα) είτε να διαιρέσουμε την πρώτη γραμμή με το 2 είτε να αφαιρέσουμε την δεύτερη γραμμή από την πρώτη είτε να προσθέσουμε την τρίτη στην πρώτη. Εδώ θα επιλέξω την αμοιβαία εναλλαγή των δύο πρώτων γραμμών, δηλαδή θα εφαρμόσω τον μετασχηματισμό $r_1 \leftrightarrow r_2$, ώστε θα πάρουμε τον εξής επαυξημένο πίνακα: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Στη συνέχεια θα μηδενίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της πρώτης στήλης χρησιμοποιώντας τη μονάδα της θέσης 11: Θα πολλαπλασιάσουμε την πρώτη γραμμή με -2 και θα την προσθέσουμε στην δεύτερη (ώστε το πρώτο στοιχείο της να γίνει $2 + (-2)(1) = 0$), δηλαδή θα εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό $r_2 \to r_2 - 2r_1$, και μετά θα προσθέσουμε την πρώτη γραμμή στην τρίτη (ώστε το πρώτο στοιχείο της να γίνει $-1 + 1 = 0$), δηλαδή θα εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό $r_3 \to r_3 + r_1$. Οι επαυξημένοι πίνακες που θα πάρουμε θα είναι, διαδοχικά,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 2+(-2)(1) & 3+(-2)(-1) & -1+(-2)(2) & 3+(-2)(-6) \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

και

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ -1+(1) & 2+(-1) & 1+(2) & 1+(-6) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right)$$

(Μην ξεχνάτε ότι τα συστήματα που έχουν αυτούς τους επαυξημένους πίνακες είναι ισοδύναμα με το αρχικό.)

Το επόμενο βήμα είναι να κάνουμε το ίδιο στην δεύτερη γραμμή και να εμφανίσουμε μονάδα στην θέση 22 (δύο δύο). Αυτό μπορεί να γίνει εφ΄ όσον υπάρχει τουλάχιστον ένα μη μηδενικό στοιχείο στην δεύτερη στήλη από την δεύτερη γραμμή και κάτω. Αν δεν υπάρχει, μετακινούμαστε μία θέση δεξιότερα και προσπαθούμε να εμφανίσουμε την μονάδα στην θέση 23. Αν όλα τα στοιχεία της τρίτης στήλης είναι επίσης μηδέν τότε μετακινούμαστε μία θέση δεξιότερα κ.ο.κ. Όταν τελικά εμφανίσουμε την μονάδα της δεύτερης γραμμής την χρησιμοποιούμε για να μηδενίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης της. Φυσικά, αν η δεύτερη γραμμή είναι από την αρχή μηδενική, την στέλνουμε στο τέλος του πίνακα.

Ας τα δούμε αυτά συνεχίζοντας το παράδειγμά μας. Για να εμφανίσουμε τη μονάδα στη θέση 22 έχουμε διάφορες επιλογές: Είτε αμοιβαία εναλλαγή την δεύτερης και τρίτης γραμμής (μια και στην τρίτη η μονάδα είναι «έτοιμη») είτε διαίρεση της δεύτερης γραμμής με το 5 (αυτό είναι πολύ βολικό εδώ μια και όλη η δεύτερη γραμμή περιέχει πολλαπλάσια του 5 οπότε δεν θα μπλέξουμε από τώρα με κλάσματα) είτε αφαίρεση από την δεύτερη γραμμή της τρίτης πολλαπλασιασμένης με 4. Να σημειωθεί ότι σε αυτό το σημείο *δεν πρέπει να εμπλέξουμε καθόλου την πρώτη γραμμή* γιατί τότε θα χαλάσουμε τα μηδενικά της πρώτης στήλης. Θα προτιμήσω να διαιρέσω την γραμμή με το 5, δηλαδή να εφαρμόσω τον μετασχηματισμό $r_2 \to (1/5)r_2$ ώστε να πάρουμε τον πίνακα $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right)$. Η επόμενη κίνηση είναι να μηδενίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της δεύτερης στήλης χρησιμοποιώντας την μονάδα της δεύτερης γραμμής. Αυτό θα το κάνουμε εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς $r_1 \to r_1 + r_2$ και $r_3 \to r_3 - r_2$ για να πάρουμε διαδοχικά τους πίνακες

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+(0) & -1+(1) & 2+(-1) & -6+(3) \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right)$$

και

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0+(-1)(0) & 1+(-1)(1) & 3+(-1)(-1) & -5+(-1)(3) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{array}\right)$$

Το επόμενο βήμα είναι να εμφανίσουμε την πρώτη μονάδα της τρίτης γραμμής και μετά να την χρησιμοποιήσουμε για να μηδενίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης της. Συνεχίζουμε έτσι και με τις επόμενες γραμμές μέχρι να φτάσουμε στη μορφή echelon του πίνακα. Να υπενθυμίσω ότι όποτε εμφανίζονται μηδενικές γραμμές τις μετακινούμε στο τέλος. Επίσης, σε περίπτωση που εμφανιστεί μία γραμμή με μηδενικά στο μέρος των συντελεστών και αριθμό διαφορετικό του μηδενός στη στήλη των σταθερών όρων τότε, όσον αφορά στην επίλυση του συστήματος, δεν έχει νόημα να συνεχίσουμε την διαδικασία: το σύστημα δεν έχει λύση.

Ας ολοκληρώσουμε το παράδειγμά μας. Ο επόμενος μετασχηματισμός είναι προφανής: θα πρέπει να διαιρέσουμε την τρίτη γραμμή με το 4 ($r_3 \to (1/4)r_3$) και να πάρουμε τον πίνακα $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$. Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε την μονάδα της τρίτης γραμμής για να μηδενίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης της εφαρμόζοντας διαδοχικά τους μετασχηματισμούς $r_1 \to r_1 - r_3$ και $r_2 \to r_2 + r_3$. Ο πίνακας γίνεται πρώτα

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+(-1)(0) & 0+(-1)(0) & 1+(-1)(1) & -3+(-1)(-2) \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

και μετά

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0+(0) & 1+(0) & -1+(1) & 3+(-2) \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι σε μορφή echelon και αντιστοιχεί στο (ισοδύναμο με το αρχικό) σύστημα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} x_1 & = & -1 \\ x_2 & = & 1 \\ x_3 & = & -2 \end{array}$$

Συμπεραίνουμε ότι το αρχικό σύστημα έχει τη μοναδική λύση $(x_1, x_2, x_3)' = (-1, 1, -2)'$.

Θα συγκεντρώσω τώρα τα βήματα που κάναμε κατά την εφαρμογή της απαλοιφής Gauss στο παραπάνω σύστημα για να δείτε πώς θα παρουσιάζω την όλη διαδικασία στη συνέχεια.

$$\underset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -6 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)} \sim \underset{\substack{r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 + r_1}}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)} \sim \underset{r_2 \leftrightarrow (1/5) r_2}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right)} \sim$$

$$\underset{\substack{r_1 \to r_1 + r_2 \\ r_3 \to r_3 - r_2}}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right)} \sim \underset{r_3 \to (1/4) r_3}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{array}\right)} \sim \underset{\substack{r_1 \to r_1 - r_3 \\ r_2 \to r_2 + r_3}}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι τα βήματα της απαλοιφής Gauss δεν εξαρτώνται από το διάνυσμα των σταθερών όρων. Παρ΄ όλο που για διαφορετικά διανύσματα σταθερών όρων η τελική λύση είναι διαφορετική (και μάλιστα για κάποια μπορεί και να μην υπάρχει), οι μετασχηματισμοί που χρειάζεται να κάνουμε είναι οι ίδιοι. Σε περίπτωση που είχαμε δύο ή περισσότερα συστήματα με τους ίδιους συντελεστές αλλά διαφορετικά διανύσματα σταθερών όρων θα μπορούσαμε να τα λύσουμε όλα ταυτόχρονα με μία απαλοιφή Gauss χρησιμοποιώντας ως επαυξημένο πίνακα τον πίνακα των συντελεστών με επί πλέον στήλες τα διανύσματα των σταθερών όρων. Θεωρήστε για παράδειγμα τα συστήματα

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

που έχουν τον ίδιο πίνακα συντελεστών. Μπορούμε να επιχειρήσουμε να τα λύσουμε μαζί εφαρμόζοντας απαλοιφή Gauss στον επαυξημένο πίνακα

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 2 & 0 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Ας δούμε τα βήματα (η ακολουθία των μετασχηματισμών είναι αυτή που επέλεξα εγώ, κάποιος άλλος θα μπορούσε να επιλέξει μία διαφορετική):

$$\underset{r_1 \to r_1 + r_2}{\left(\begin{array}{cccc|cc} 2 & 0 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)} \sim \underset{r_2 \to r_2 + r_1}{\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)} \sim \underset{r_2 \to (-1/6) r_2}{\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & -6 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1/6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7/6 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} r_1 \to r_1 + 3r_2 \\ r_3 \to r_3 - r_2 \end{array}$$

Έχοντας φέρει τον πίνακα των συντελεστών σε μορφή echelon βλέπουμε ότι έχει μία μηδενική γραμμή ενώ ο αντίστοιχος σταθερός όρος του πρώτου συστήματος είναι μηδέν που σημαίνει ότι το πρώτο σύστημα έχει λύσεις και ο αντίστοιχος σταθερός όρος του δεύτερου συστήματος είναι $7/6 \neq 0$ που σημαίνει ότι το δεύτερο σύστημα δεν έχει λύση. Οι λύσεις του πρώτου συστήματος είναι ίδιες με τις λύσεις του ισοδύναμου συστήματος

$$\begin{array}{rcr} x_1 \quad +x_3+x_4 & = & 2 \\ x_2-x_3+x_4 & = & -1 \end{array}$$

δηλαδή όλα τα διανύσματα $(x_1, x_2, x_3, x_4)' = (2 - x_3 - x_4, -1 + x_3 - x_4, x_3, x_4)'$ με $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

<u>*Αντιστροφή πίνακα μέσω απαλοιφής Gauss.*</u> Η απαλοιφή Gauss μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε τον αντίστροφο ενός πίνακα. Έστω $\underset{n\times n}{A}$ πίνακας και ας γράψουμε $A^{-1} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{x}_1 & \underset{\sim}{x}_2 & \cdots & \underset{\sim}{x}_n \end{pmatrix}$ με $\underset{\sim}{x}_1, \ldots, \underset{\sim}{x}_n \in \mathbb{R}^n$ και $I_n = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{e}_1 & \underset{\sim}{e}_2 & \cdots & \underset{\sim}{e}_n \end{pmatrix}$ με $\underset{\sim}{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)', \underset{\sim}{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)', \ldots, \underset{\sim}{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)'$. Τότε ισχύει

$$AA^{-1} = A \begin{pmatrix} \underset{\sim}{x}_1 & \underset{\sim}{x}_2 & \cdots & \underset{\sim}{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\underset{\sim}{x}_1 & A\underset{\sim}{x}_2 & \cdots & A\underset{\sim}{x}_n \end{pmatrix}$$

(αν δεν θυμάστε αυτήν την ιδιότητα από την ενότητα του πολλαπλασιασμού πινάκων διαμερισμένων σε μπλοκ γυρίστε στη σελίδα 37 και ξαναδιαβάστε την) και

$$AA^{-1} = I_n = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{e}_1 & \underset{\sim}{e}_2 & \cdots & \underset{\sim}{e}_n \end{pmatrix}$$

Επομένως οι στήλες $\underset{\sim}{x}_1, \ldots, \underset{\sim}{x}_n$ του A^{-1} ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$A\underset{\sim}{x}_1 = \underset{\sim}{e}_1, \quad A\underset{\sim}{x}_2 = \underset{\sim}{e}_2, \quad \ldots, \quad A\underset{\sim}{x}_n = \underset{\sim}{e}_n$$

Κάθε μία από τις $A\underset{\sim}{x}_i = \underset{\sim}{e}_i$ είναι ένα γραμμικό σύστημα και τα παραπάνω n γραμμικά συστήματα έχουν τον ίδιο πίνακα συντελεστών, τον A. Μπορούμε λοιπόν να τα λύσουμε όλα μαζί μέσω απαλοιφής Gauss.

Ως παράδειγμα ας βρούμε τον αντίστροφο του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(Φυσικά μπορούμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο και από τον τύπο $\mathrm{adj}(A)/|A|$, αλλά γι' αυτό θα χρειαζόταν να υπολογίσουμε την ορίζουσα του A καθώς και άλλες δεκαέξι ορίζουσες 3×3. Πολύς μπελάς.) Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

και λύνουμε τα τέσσερα συστήματα ταυτόχρονα εφαρμόζοντας μετασχηματισμούς:

$$\underset{r_1 \to (1/4)r_1}{\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)} \sim \underset{\substack{r_2 \to r_2 + 2r_1 \\ r_3 \to r_3 - 2r_1}}{\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)} \sim$$

$$\underset{r_2 \to 2r_2}{\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1/2 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & -2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)} \sim \underset{\substack{r_1 \to r_1 + (1/4)r_2 \\ r_3 \to r_3 + (3/2)r_2 \\ r_4 \to r_4 - r_2}}{\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & -2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)} \sim$$

$$\underset{r_3 \to (-1/5)r_3}{\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)} \sim \underset{\substack{r_1 \to r_1 + (1/2)r_3 \\ r_2 \to r_2 + 2r_3}}{\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & -3/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)} \sim$$

$$\underset{r_4 \to -r_4}{\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 2/5 & 1/5 & -1/10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3/5 & 4/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & -3/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)} \sim \underset{\substack{r_1 \to r_1 + (-1/2)r_4 \\ r_2 \to r_2 - r_4}}{\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 2/5 & 1/5 & -1/10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3/5 & 4/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & -3/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/10 & -4/5 & -1/10 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2/5 & -6/5 & -2/5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & -3/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Οι παραπάνω μετασχηματισμοί ήταν εκείνοι που επέλεξα εγώ. Κάποιος άλλος θα μπορούσε να είχε επιλέξει διαφορετικούς μετασχηματισμούς.

Τέλος! Ο αντίστροφος του A είναι ο

$$\begin{pmatrix} -1/10 & -4/5 & -1/10 & 1/2 \\ -2/5 & -6/5 & -2/5 & 1 \\ -1/5 & -3/5 & -1/5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Επαληθεύστε το πολλαπλασιάζοντάς τον με τον A από αριστερά και από δεξιά. (Μην πείτε «άσ' το καλύτερα»! Είστε βέβαιοι ότι όλες οι πράξεις έγιναν σωστά;)

Παρατηρήστε ότι μετά την ολοκλήρωση της απαλοιφής Gauss αριστερά της κάθετης γραμμής έχει εμφανισθεί ο μοναδιαίος πίνακας. Αυτό συμβαίνει ακριβώς επειδή ο A ήταν αντιστρέψιμος. Σε περίπτωση που δεν ήταν αντιστρέψιμος, τουλάχιστον ένα από τα συστήματα $A\underset{\sim}{x}_i = \underset{\sim}{e}_i$ δεν θα είχε λύση και κατά τη διάρκεια της διαδικασίας θα εμφανιζόταν οπωσδήποτε μία μηδενική γραμμή αριστερά της κάθετης γραμμής. Αυτό σημαίνει ότι *ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον η απαλοιφή Gauss τον οδηγεί στον μοναδιαίο πίνακα.*

Απαλοιφή Gauss σε ομογενή συστήματα. Όταν το γραμμικό σύστημα είναι ομογενές η απαλοιφή δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε τον επαυξημένο πίνακα για να κάνουμε την απαλοιφή Gauss· την εφαρμόζουμε μόνο στον πίνακα των συντελεστών. Ο λόγος είναι ότι το διάνυσμα $\underset{\sim}{0}$ των σταθερών όρων παραμένει αναλλοίωτο όταν εφαρμόζουμε κάποιον από τους τρεις μετασχηματισμούς: αν εναλλάξουμε μεταξύ τους δύο γραμμές εναλάσσονται δύο μηδενικά· αν πολλαπλασιάσουμε μία γραμμή με κάποιον αριθμό το 0 παραμένει 0· αν προσθέσουμε σε μία γραμμή κάποιο πολλαπλάσιο μίας άλλης προσθέτουμε στο 0 ένα πολλαπλάσιο του μηδενός δηλαδή 0.

Πάρτε ως παράδειγμα το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} -2x_1+\ x_2+3x_3-\ x_4 &= 0 \\ -\ x_2-\ x_3+2x_4 &= 0 \\ 3x_1-\ x_2+2x_3-3x_4 &= 0 \\ 2x_2-2x_3+3x_4 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμούς στον πίνακα των συντελεστών (επιλέξτε τους εσείς) βρίσκουμε ότι

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

που σημαίνει ότι το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 \qquad -\frac{1}{4}x_4 &= 0 \\ x_2 \ +\frac{3}{4}x_4 &= 0 \\ x_3-\frac{3}{4}x_4 &= 0 \end{aligned}$$

άρα έχει λύσεις όλα τα διανύσματα της μορφής $(x_1, x_2, x_3, x_4)' = (x_4/4, -3x_4/4, 3x_4/4, x_4)' = x_4(1/4, -3/4, 3/4, 1)'$ με $x_4 \in \mathbb{R}$.

Πότε υπάρχει μοναδική λύση και πότε άπειρες λύσεις; Θεωρήστε ένα οποιοδήποτε γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με m αγνώστους:

$$\underset{n\times m}{A}\ \underset{m\times 1}{\underset{\sim}{x}} = \underset{n\times 1}{\underset{\sim}{b}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Προφανώς, το σύστημα έχει μοναδική λύση αν και μόνον αν είναι ισοδύναμο με ένα «σύστημα» της μορφής

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= c_1 \\ x_2 \qquad &= c_2 \\ \vdots \qquad & \\ x_m &= c_m \end{aligned}$$

όπου $c_1, \ldots, c_m$ είναι σταθερές. Αυτό μας λέει ότι *μοναδική λύση μπορεί να έχουμε αν και μόνον αν οι εξισώσεις είναι τουλάχιστον όσες και οι άγνωστοι.* Πράγματι, σε περίπτωση που έχουμε ακριβώς m εξισώσεις (όσες και οι άγνωστοι, δηλαδή $n = m$) μοναδική λύση θα έχουμε αν για τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος ισχύει

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & b_m \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_m \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} x_1 \qquad & = & c_1 \\ x_2 \quad & = & c_2 \\ \vdots \qquad & & \\ x_m & = & c_m \end{array}$$

Βλέπουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση μετά την απαλοιφή Gauss ο πίνακας των συντελεστών καταλήγει στον μοναδιαίο πίνακα. Επομένως, ένα σύστημα m εξισώσεων με m αγνώστους έχει μοναδική λύση αν και μόνον αν ο πίνακας των συντελεστών είναι αντιστρέψιμος. Η μοναδική λύση είναι το διάνυσμα $A^{-1}\underset{\sim}{b}$ μια και

$$\underset{m\times m}{A}\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b} \Leftrightarrow A^{-1}A\underset{\sim}{x} = A^{-1}\underset{\sim}{b} \Leftrightarrow \underset{\sim}{x} = A^{-1}\underset{\sim}{b}$$

Αν οι εξισώσεις είναι περισσότερες (αν δηλαδή $n > m$) μοναδική λύση θα έχουμε αν

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_m \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} x_1 \qquad & = & c_1 \\ x_2 \quad & = & c_2 \\ \vdots \qquad & & \\ x_m & = & c_m \end{array}$$

Σε περίπτωση που οι εξισώσεις είναι λιγότερες από τους αγνώστους ($n < m$), *αν υπάρχει* λύση αυτή δεν μπορεί να είναι μοναδική μια και είναι αδύνατον η απαλοιφή Gauss να καταλήξει σε μορφή echelon που να περιλαμβάνει τον μοναδιαίο τάξης m. Αυτό μας λέει αμέσως ότι *κάθε ομογενές σύστημα με περισσότερους αγνώστους απ' ό,τι εξισώσεις έχει άπειρες λύσεις* μια και ήδη υπάρχει η τετριμμένη λύση (δηλαδή το $\underset{\sim}{0}$) γι' αυτό.

Βασιζόμενοι στην προηγούμενη συζήτηση μπορούμε να συνοψίσουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις για τις λύσεις του γραμμικού συστήματος $\underset{n\times m}{A}\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ σε έναν πίνακα:

		Μη ομογενές ($\underset{\sim}{b} \neq \underset{\sim}{0}$)	Ομογενές ($\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{0}$)
$n = m$	A αντιστρέψιμος	Μοναδική λύση $\underset{\sim}{x} = A^{-1}\underset{\sim}{b}$	Μοναδική λύση $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$
	A μη αντιστρέψιμος	Καμμία ή άπειρες λύσεις	Άπειρες λύσεις
$n > m$		Καμμία, μία ή άπειρες λύσεις	Μόνο το $\underset{\sim}{0}$ ή άπειρες λύσεις
$n < m$		Καμμία ή άπειρες λύσεις	Άπειρες λύσεις

Ο κανόνας του Cramer. Όπως είδαμε, σε περίπτωση που ο $\underset{m\times m}{A}$ είναι αντιστρέψιμος η μοναδική λύση του συστήματος $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ είναι η $\underset{\sim}{x} = A^{-1}\underset{\sim}{b}$. Το διάνυσμα $A^{-1}\underset{\sim}{b}$ μπορούμε να το πάρουμε με τον **κανόνα του Cramer** που είναι η μέθοδος «με τις ορίζουσες» που ξέρετε από το σχολείο για συστήματα 2×2.

Έστω $|A|$ η ορίζουσα του A και $|A_j|$ η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε την στήλη j του A με το διάνυσμα των σταθερών όρων $\underset{\sim}{b}$. Τότε ισχύει

$$A^{-1}\underset{\sim}{b} = \Big(\frac{|A_1|}{|A|}, \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, \frac{|A_m|}{|A|}\Big)'.$$

Για να το δούμε αυτό αρκεί να δείξουμε ότι $\operatorname{adj}(A)\,\underset{\sim}{b} = (|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_m|)'$ μια και $A^{-1} = \operatorname{adj}(A)/|A|$. Η γραμμή j του $\operatorname{adj}(A)$ είναι η $\big((-1)^{j+1}|A_{1j}|, (-1)^{j+2}|A_{2j}|, \ldots, (-1)^{m+j}|A_{mj}|\big)'$ και το j στοιχείο του διανύσματος $\operatorname{adj}(A)\,\underset{\sim}{b}$ που είναι το εσωτερικό γινόμενό της με το $\underset{\sim}{b}$. Αυτό είναι $(-1)^{1+j}\,|A_{1j}|b_1 + (-1)^{2+j}\,|A_{2j}|b_2 + \cdots + (-1)^{m+j}\,|A_{mj}|b_m$ δηλαδή ακριβώς η ορίζουσα $|A_j|$ όπως ορίστηκε παραπάνω.

Ας εφαρμόσουμε τον κανόνα του Cramer για να (ξανα)βρούμε την λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + 3x_2 - \ x_3 &= 3 \\ x_1 - \ x_2 + 2x_3 &= -6 \\ -x_1 + 2x_2 + \ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ο πίνακας των συντελεστών. Τότε,

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -10 - 5 - 5 = -20$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -15 + 30 + 5 = 20$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = -16 - 4 - 0 = -20$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = 22 + 3 + 15 = 40$$

οπότε η μοναδική λύση του συστήματος είναι $(x_1, x_2, x_3)' = \Big(\dfrac{20}{-20}, \dfrac{-20}{-20}, \dfrac{40}{-20}\Big)' = (-1, 1, -2)'$.

Μερικές φορές τυχαίνει να συναντάμε συστήματα εξισώσεων που δεν είναι γραμμικές αλλά μπορούν να μετατραπούν σε τέτοιες. Θεωρήστε για παράδειγμα το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2/y &= 2 \\ -x^2 + 1/y &= -1 \end{aligned}$$

Το σύστημα μπορεί να μετασχηματιστεί σε γραμμικό θέτοντας $u = x^2, v = 1/y$. Τότε θα γίνει

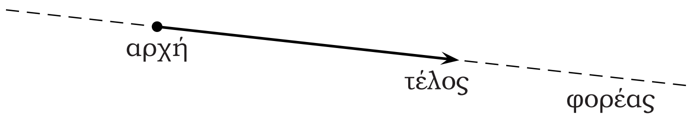
$$\begin{aligned} 3u - 2v &= 2 \\ -u + v &= -1 \end{aligned}$$

Αυτό έχει μοναδική λύση $u = 0, v = -1$. Αυτό σημαίνει ότι το αρχικό σύστημα έχει τη μοναδική λύση $x = 0, y = -1$, αφού $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $1/y = -1 \Leftrightarrow y = -1$.

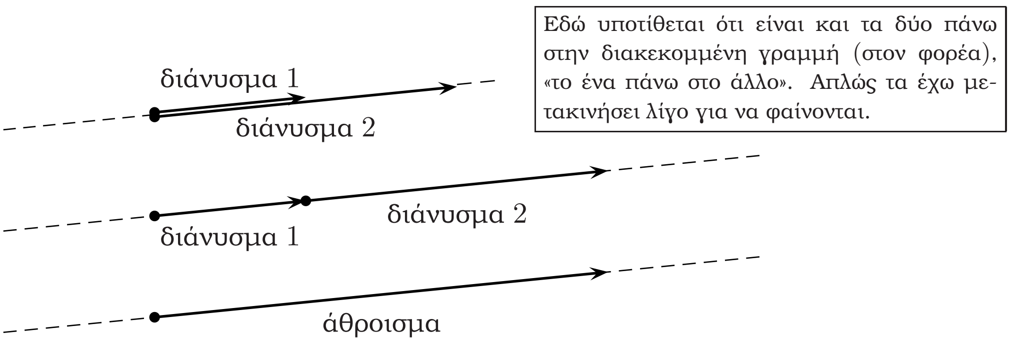
7 Διανύσματα

Τα διανύσματα τα γνωρίζετε από τα μαθήματα της Φυσικής του σχολείου όπου τα χρησιμοποιούσατε κυρίως για να αναπαραστήσετε δυνάμεις που ασκούνται σε διάφορα σώματα.

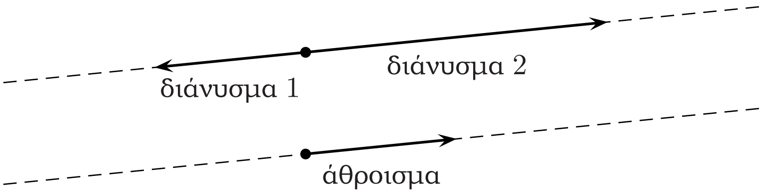
Όπως ξέρετε, ένα διάνυσμα είναι ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα με αρχή και τέλος που παριστάνεται ως βελάκι. Τα χαρακτηριστικά ενός διανύσματος είναι (α) ο φορέας του, δηλαδή η ευθεία στην οποία οποία ανήκει το ευθύγραμμο τμήμα, (β) η φορά του, δηλαδή η κατεύθυνση στην οποία δείχνει το βελάκι, και (γ) το μήκος του.



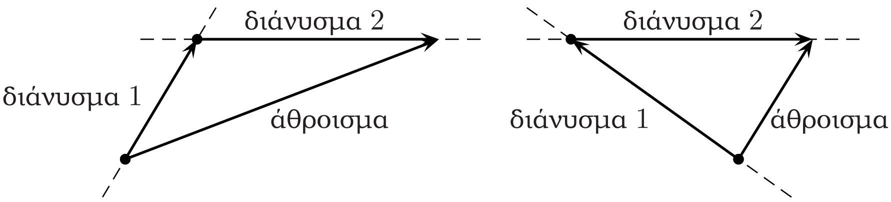
Θυμάστε επίσης από το σχολείο πώς προσθέτουμε δύο διανύσματα: (α) Όταν έχουν τον ίδιο φορέα και την ίδια φορά τότε το άθροισμά τους (η συνισταμένη τους) είναι ένα διάνυσμα με τον ίδιο φορέα και την ίδια φορά με τα δύο διανύσματα και μήκος το άθροισμα των μηκών τους:



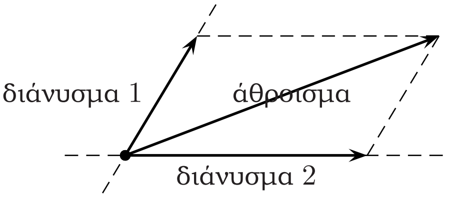
(β) Όταν έχουν τον ίδιο φορέα και αντίθετη φορά τότε το άθροισμά τους είναι ένα διάνυσμα με τον ίδιο φορέα, μήκος ίσο με την διαφορά των μηκών τους και φορά ίδια με την φορά του μακρύτερου από τα δύο:

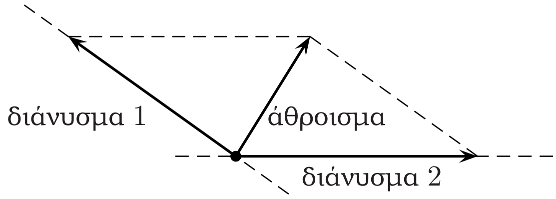


(γ) Όταν έχουν διαφορετικό φορέα και είναι διαδοχικά, δηλαδή το τέλος του ενός συμπίπτει με την αρχή του άλλου τότε το άθροισμά τους είναι το διάνυσμα που ξεκινάει από την αρχή του πρώτου και καταλήγει στο τέλος του δεύτερου:



(δ) Όταν έχουν διαφορετικό φορέα τότε για να τα προσθέσουμε ακολουθούμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Σχεδιάζουμε ένα παραλληλόγραμμο με πλευρές τα δύο διανύσματα και ως άθροισμά τους παίρνουμε την διαγώνιό του:

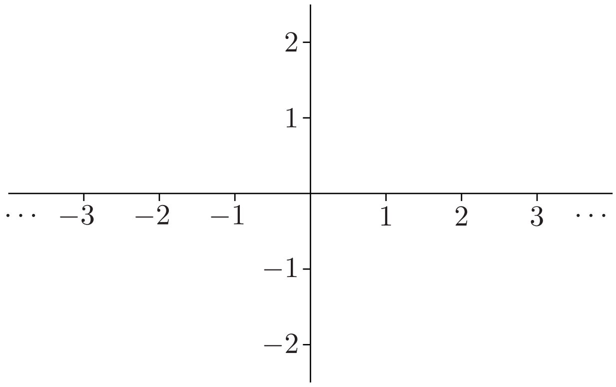


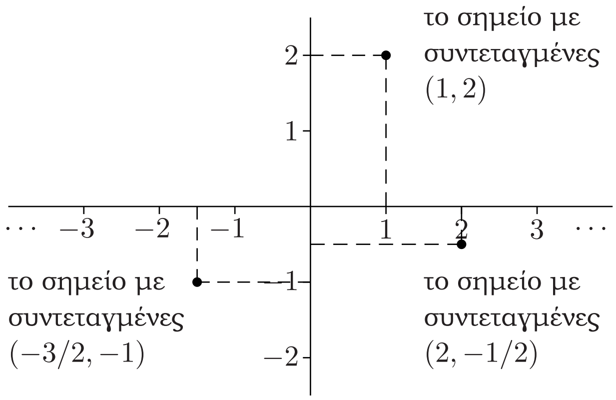


(Όπως βλέπετε από τα παραπάνω σχήματα, το άθροισμα δύο διανυσμάτων είναι το ίδιο είτε είναι συνεχόμενα είτε έχουν την ίδια αρχή.)

Είναι λογικό να αναρωτηθείτε τι σχέση έχει ο ορισμός που έχουμε δώσει για τα διανύσματα ως πίνακες-στήλες με τα βελάκια που ξέρετε. Η σύνδεση θα γίνει σε λίγο, αφού θυμηθούμε και μερικά ακόμη πράγματα.

Όπως ξέρετε, σε κάθε σημείο του επιπέδου μπορούμε να αντιστοιχίσουμε συντεταγμένες. Ο κλασσικός τρόπος είναι να επιλέξουμε αυθαίρετα ένα σημείο στο οποίο αντιστοιχίζουμε τις συντεταγμένες $(0,0)$ και μετά φέρνουμε δύο άξονες που τέμνονται κάθετα σε αυτό. Οι άξονες διαβαθμίζονται επίσης με αυθαίρετο τρόπο με την έννοια του ότι η μονάδα μπορεί να αντιστοιχεί σε διαφορετικό μήκος σε κάθε άξονα. Για να βρούμε τις συντεταγμένες κάθε σημείου σε ένα σύστημα αξόνων φέρνουμε κάθετες από αυτό το σημείο στους δύο άξονες. Τα σημεία στα οποία οι κάθετες τους τέμνουν είναι οι συντεταγμένες αυτού του σημείου. Το ποιος άξονας αντιστοιχεί σε ποια συντεταγμένη επιλέγεται αυθαίρετα αλλά συνηθίζεται όταν έχουμε έναν οριζόντιο και έναν κάθετο άξονα ο οριζόντιος να αντιστοιχεί στην πρώτη και ο κάθετος στην δεύτερη.



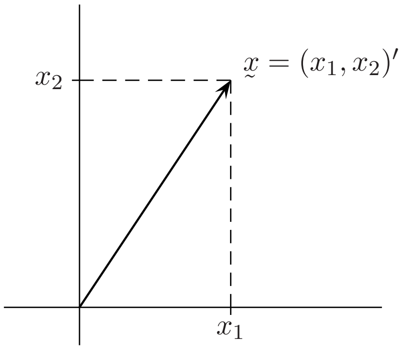


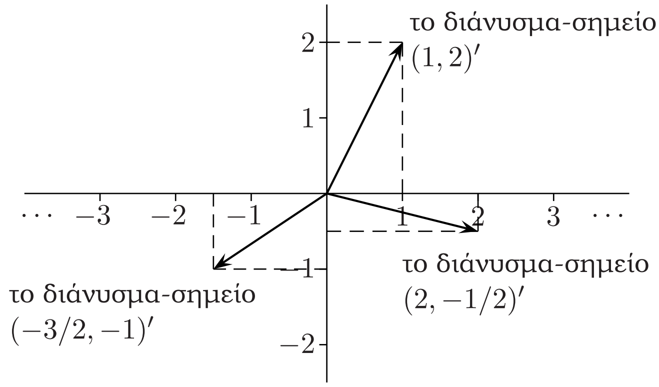
Κάθε σημείο του επιπέδου καθορίζεται από τις δύο συντεταγμένες του αλλά και αντίστροφα, οποιοδήποτε διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών ορίζει ένα σημείο στο επίπεδο. Έτσι ολόκληρο το επίπεδο παριστάνεται από διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών. Αφού αρκούν ακριβώς δύο πραγματικοί αριθμοί για να περιγράψουμε όλα τα σημεία του επιπέδου λέμε ότι το επίπεδο έχει δύο διαστάσεις: είναι διδιάστατο. Επομένως, το επίπεδο ταυτίζεται με το σύνολο

$$\{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^2.$$

Το «$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$» είναι το καρτεσιανό γινόμενο του συνόλου των πραγματικών αριθμών με τον εαυτό του και αναφερόμαστε σε αυτό με τον όρο «αρ τετράγωνο» και χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathbb{R}^2$.

Εδώ εμφανίζονται και τα διανύσματα-πίνακες στήλες που συζητήσαμε στην αρχή του μαθήματος και πιο συγκεκριμένα τα διδιάστατα διανύσματα. Το σημείο τομής των αξόνων (την «αρχή των αξόνων») που έχει συντεταγμένες $(0,0)$ θεωρούμε ότι ταυτίζεται με το μηδενικό διδιάστατο διάνυσμα $\underset{2\times 1}{\underset{\sim}{0}} = (0,0)'$. Όλα τα υπόλοιπα σημεία θεωρούμε ότι συμπίπτουν με ένα διάνυσμα το καθένα: Το σημείο με συντεταγμένες (x_1,x_2) θεωρούμε ότι συμπίπτει με το διάνυσμα $\underset{\sim}{x} = (x_1,x_2)'$. Το διάνυσμα αυτό μπορούμε να το αναπαραστήσουμε και ως βελάκι με αρχή το σημείο $\underset{\sim}{0}$ και τέλος το σημείο $\underset{\sim}{x} = (x_1,x_2)'$. Έτσι, *κάθε διδιάστατο διάνυσμα το θεωρούμε ταυτόχρονα ως το σημείο που έχει συντεταγμένες τα στοιχεία του και ως το βελάκι με τέλος αυτό το σημείο και αρχή το σημείο* $\underset{\sim}{0}$.

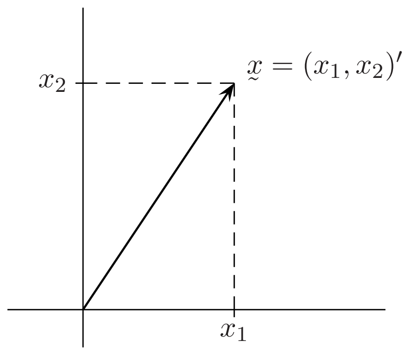




Μια και τα σημεία του επιπέδου είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τα διδιάστατα διανύσματα (πίνακες-στήλες) στο εξής θα θεωρούμε ότι το $\mathbb{R}^2$ είναι το σύνολο το διδιάστατων διανυσμάτων:

$$\mathbb{R}^2 = \{\underset{\sim}{x} = (x_1,x_2)' : x_1,x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Όπως αναφέραμε στην αρχή της ενότητας, ένα από τα χαρακτηριστικά ενός διανύσματος είναι το μήκος του. Το μήκος του διανύσματος $\underset{\sim}{x} = (x_1,x_2)'$, το οποίο θα συμβολίζουμε με $\|\underset{\sim}{x}\|$ υπολοίζεται εύκολα με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος που λέει ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο του μήκους της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των μηκών των δύο κάθετων πλευρών. Στο σχήμα δεξιά βλέπουμε ότι οι άξονες και οι διακεκομμένες γραμμές σχηματίζουν δύο (ίσα μεταξύ τους) ορθογώνια τρίγωνα που έχουν ως υποτείνουσα το διάνυσμα $\underset{\sim}{x}$. Οι κάθετες πλευρές έχουν μήκη $|x_1|$ και $|x_2|$, αντίστοιχα (βάζω απόλυτες τιμές για να καλύψω και τις περιπτώσεις αρνητικών συντεταγμένων), άρα το τετράγωνο του μήκους του διανύσματος ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των μηκών των συντεταγμένων του: $\|\underset{\sim}{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2$. Παρατηρήστε επίσης ότι η ποσότητα $x_1^2 + x_2^2$ ισούται με το εσωτερικό γινόμενο του $\underset{\sim}{x}$ με τον εαυτό του: $\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{x} = x_1^2 + x_2^2$. Ως εκ τούτου,



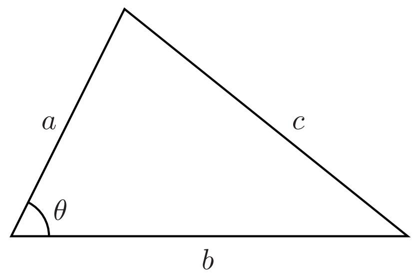
το μήκος του διανύσματος $\underset{\sim}{x} = (x_1,x_2)'$ *ισούται με* $\|\underset{\sim}{x}\| = \sqrt{\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \Big(\sum_{i=1}^{2} x_i^2\Big)^{1/2}$

Προφανώς το μήκος ενός διανύσματος είναι μη αρνητική ποσότητα. Μπορεί όμως να είναι μηδέν και αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν $x_1 = x_2 = 0$, δηλαδή αν και μόνον αν $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$.

Ένα διάνυσμα που έχει μήκος ίσο με τη μονάδα λέμε ότι είναι **μοναδιαίο**. Παρατηρήστε ότι κάθε διάνυσμα αν διαιρεθεί με το μήκος του μετατρέπεται σε μοναδιαίο: Αν $\underset{\sim}{v} = (v_1, v_2)'$ και $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{v}/\|\underset{\sim}{v}\| = (v_1/\|\underset{\sim}{v}\|, v_2/\|\underset{\sim}{v}\|)'$ τότε

$$\|\underset{\sim}{u}\|^2 = \left(\frac{v_1}{\|\underset{\sim}{v}\|}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{\|\underset{\sim}{v}\|}\right)^2 = \frac{v_1^2}{\|\underset{\sim}{v}\|^2} + \frac{v_2^2}{\|\underset{\sim}{v}\|^2} = \frac{v_1^2}{v_1^2 + v_2^2} + \frac{v_2^2}{v_1^2 + v_2^2} = 1$$

οπότε $\|\underset{\sim}{u}\| = 1$. Όταν μετατρέπουμε ένα διάνυσμα σε μοναδιαίο διαιρώντας το με το μήκος του τότε λέμε ότι *το κανονικοποιούμε* και ότι είναι *κανονικοποιημένο*.



Τα μήκη των πλευρών μη ορθογωνίων τριγώνων συνδέονται με μία γενικότερη σχέση από αυτήν που λέει το Πυθαγόρειο Θεώρημα που είναι γνωστή ως νόμος των συνημιτόνων. Ο νόμος των συνημιτόνων λέει ότι τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ικανοποιούν την εξίσωση

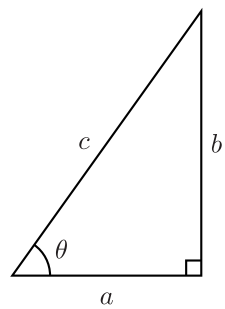
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

Με $\cos\theta$ συμβολίζεται το συνημίτονο της γωνίας θ (αυτό που στο σχολείο γράφατε $\text{συν}\,\theta$) που είναι η γωνία που σχηματίζουν οι πλευρές με τα μήκη a και b. Το «cos» προέρχεται από την λέξη cosine που είναι ο αγγλικός όρος για το συνημίτονο. Παρεμπιπτόντως ο αντίστοιχος όρος για το ημίτονο είναι sine και για την εφαπτομένη tangent· το ημίτονο της γωνίας θ γράφεται $\sin\theta$ και η εφαπτομένη της $\tan\theta$ $(= \sin\theta/\cos\theta)$.

Επιστρέφοντας στον νόμο των συνημιτόνων παρατηρήστε ότι αν η γωνία θ είναι ορθή τότε παίρνουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα μια και το συνημίτονο των 90 μοιρών (ή, ισοδύναμα, της γωνίας $\pi/2$) ισούται με μηδέν.

Ας θυμηθούμε λίγη (πολύ λίγη) τριγωνομετρία

Όσοι θυμούνται πώς ορίζεται το συνημίτονο και το ημίτονο μίας γωνίας καθώς και τον τριγωνομετρικό κύκλο ας προσπεράσουν αυτήν την παρένθεση.



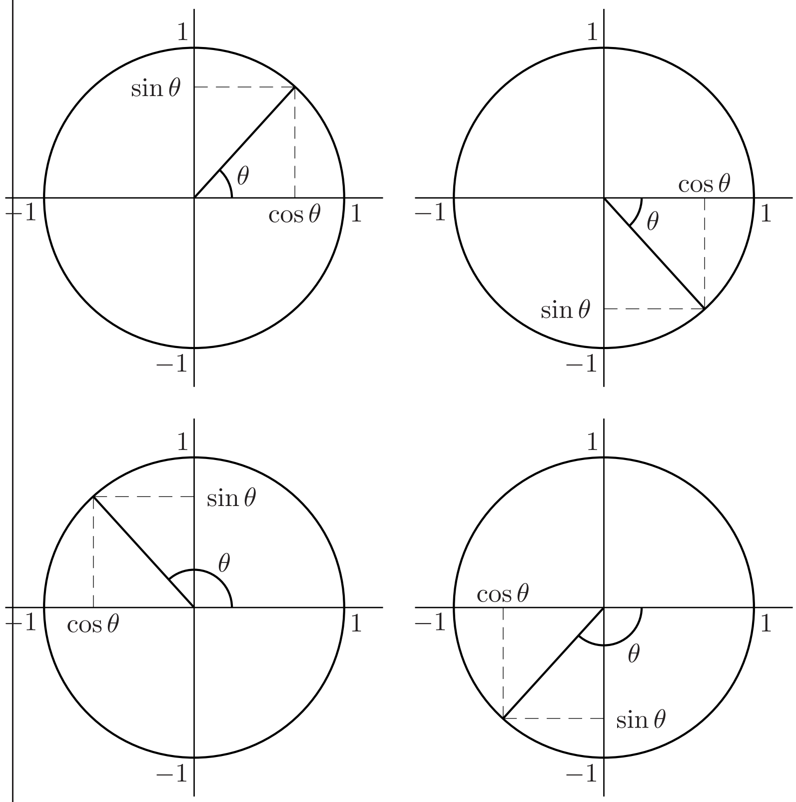
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη a και b και υποτείνουσα που έχει μήκος c. Έστω επίσης θ η γωνία που σχηματίζει η υποτείνουσα με την κάθετη πλευρά μήκους a. Ορίζουμε

$$\cos\theta = \frac{\text{μήκος προσκείμενης (στη γωνία) κάθετης}}{\text{μήκος υποτείνουσας}} = \frac{a}{c}$$

και

$$\sin\theta = \frac{\text{μήκος απέναντι (από τη γωνία) κάθετης}}{\text{μήκος υποτείνουσας}} = \frac{b}{c}$$

Ο τριγωνομετρικός κύκλος είναι ένας κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με τη μονάδα.

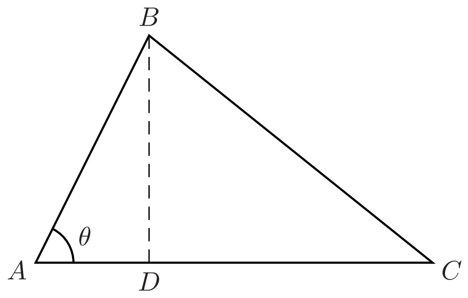


Στα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται τα συνημίτονα και ημίτονα δίνονται κανονικά από τους παραπάνω λόγους: εδώ η υποτείνουσα ισούται με τη μονάδα μια και είναι ακτίνα του κύκλου.

Οξείες γωνίες $(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ έχουν θετικό συνημίτονο ενώ αμβλείες γωνίες $(-\pi < \theta < -\pi/2$ ή $\pi/2 < \theta < \pi$ έχουν αρνητικό συνημίτονο. Το συνημίτονο ορθής γωνίας ($\theta = \pi/2$ ή $\theta = -\pi/2$) ισούται με μηδέν. Η γωνία 0 έχει συνημίτονο ένα ενώ η γωνία π (ευθεία) έχει συνημίτονο μείον ένα.

Αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο: $\cos(-\theta) = \cos\theta$.

Ας ρίξουμε μια ματιά και στον νόμο των συνημιτόνων. Θεωρήστε το ακόλουθο τρίγωνο, το ABC, του οποίου οι πλευρές AB, AC, BC έχουν μήκη a, b, c, αντίστοιχα.

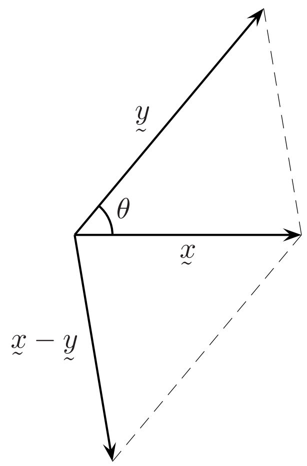


Από το ορθογώνιο τρίγωνο ABD παίρνουμε ότι $\cos\theta = AD/AB$ άρα $AD = AB\cos\theta$. Επίσης, επειδή $AC = AD + DC$ θα έχουμε $DC = AC - AD$. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ABD παίρνουμε $AB^2 = AD^2 + BD^2$ άρα $BD^2 = AB^2 - AD^2$. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα και στο τρίγωνο BDC παίρνουμε

$$\begin{aligned}
BC^2 &= BD^2 + DC^2 \\
&= AB^2 - AD^2 + (AC - AD)^2 \qquad (\text{αφού } DC = AC - AD) \\
&= AB^2 - AD^2 + AC^2 - 2ACAD + AD^2 \\
&= AB^2 + AC^2 - 2ABAC\cos\theta \qquad (\text{αφού } AD = AB\cos\theta)
\end{aligned}$$

Θα εφαρμόσουμε τώρα τον νόμο των συνημιτόνων και θα δούμε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων σχετίζεται με την γωνία που σχηματίζουν.

Δείτε το σχήμα δεξιά. Έχουμε δύο μη συνευθειακά διανύσματα, τα $\utilde{x} = (x_1, x_2)'$ και $\utilde{y} = (y_1, y_2)'$ και η μεταξύ τους γωνία είναι θ. Θεωρήστε επίσης το διάνυσμα $\utilde{x} - \utilde{y}$. Για να καταλάβετε γιατί είναι αυτό που βλέπουμε στο σχήμα εφαρμόστε τον κανόνα του παραλληλογράμμου για να προσθέσετε τα $\utilde{x} - \utilde{y}$ και $\utilde{y}$ και να πάρετε $(\utilde{x} - \utilde{y}) + \utilde{y} = \utilde{x}$. Το σχήμα που βλέπουμε είναι ένα παραλληλόγραμμο, επομένως η πάνω διακεκομμένη γραμμή έχει μήκος $\|\utilde{x} - \utilde{y}\|$. Εφαρμόζοντας τον νόμο των συνημιτόνων στο πάνω τρίγωνο παίρνουμε



$$\|\utilde{x} - \utilde{y}\|^2 = \|\utilde{x}\|^2 + \|\utilde{y}\|^2 - 2\|\utilde{x}\|\|\utilde{y}\| \cos\theta$$

Όπως είπαμε προηγουμένως, το τετράγωνο του μήκους ενός διανύσματος ισούται με το εσωτερικό γινόμενό με τον εαυτό του. Άρα,

$$\|\utilde{x} - \utilde{y}\|^2 = (\utilde{x} - \utilde{y})'(\utilde{x} - \utilde{y}) = \utilde{x}'\utilde{x} - \utilde{x}'\utilde{y} - \utilde{y}'\utilde{x} + \utilde{y}'\utilde{y} = \|\utilde{x}\|^2 + \|\utilde{y}\|^2 - 2\utilde{x}'\utilde{y}'$$

μια και $\utilde{x}'\utilde{x} = \|\utilde{x}\|^2, \utilde{y}'\utilde{y} = \|\utilde{y}\|^2$ και $\utilde{x}'\utilde{y} = \utilde{y}'\utilde{x}$. Συγκρίνοντας τις δύο εκφράσεις για το $\|\utilde{x} - \utilde{y}\|^2$ συμπεραίνουμε ότι $\|\utilde{x}\|\|\utilde{y}\| \cos\theta = \utilde{x}'\utilde{y}$. Εφ' όσον λοιπόν κανένα από τα δύο διανύσματα δεν είναι μηδενικό μπορούμε να λύσουμε ως προς $\cos\theta$ και να διαπιστώσουμε ότι

$$\textit{για την γωνία } \theta \textit{ μεταξύ δύο διανυσμάτων } \utilde{x}, \utilde{y} \textit{ ισχύει} \quad \cos\theta = \frac{\utilde{x}'\utilde{y}}{\|\utilde{x}\|\|\utilde{y}\|}$$

Αφού τα μήκη μη μηδενικών διανυσμάτων είναι θετικές ποσότητες, το πρόσημο του συνημιτόνου της γωνίας συμπίπτει με αυτό του εσωτερικού γινομένου. Άρα, αν δύο διανύσματα έχουν θετικό εσωτερικό γινόμενο τότε σχηματίζουν οξεία γωνία, αν έχουν αρνητικό εσωτερικό γινόμενο τότε σχηματίζουν αμβλεία γωνία, ενώ αν το εσωτερικο τους γινόμενο ισούται με μηδέν τότε σχηματίζουν ορθή γωνία δηλαδή είναι κάθετα. Κάθετα μεταξύ τους διανύσματα συχνά λέμε ότι είναι ορθογώνια.

Για παράδειγμα, τα διανύσματα $\utilde{x} = (1,3)', \utilde{y} = (-1,2)'$ έχουν εσωτερικό γινόμενο $\utilde{x}'\utilde{y} = (1)(-1) + (3)(2) = -1 + 6 = 5 > 0$ άρα σχηματίζουν οξεία γωνία. Τα μήκη τους είναι $\|\utilde{x}\| = (\utilde{x}'\utilde{x})^{1/2} = (1+9)^{1/2} = \sqrt{10}$ και $\|\utilde{y}\| = (\utilde{y}'\utilde{y})^{1/2} = (1+4)^{1/2} = \sqrt{5}$ άρα η γωνία που σχηματίζουν έχει συνημίτονο $\dfrac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\dfrac{\pi}{4}$ δηλαδή σχηματίζουν γωνία 45° $(= \pi/4)$. Από την άλλη πλευρά, τα διανύσματα $(2,-1)', (1,2)'$ έχουν εσωτερικό γινόμενο $(2)(1) + (-1)(2) = 2 - 2 = 0$ άρα είναι ορθογώνια (σχηματίζουν γωνία 90°).

Στην περίπτωση που δύο διανύσματα έχουν τον ίδιο φορέα τότε το ένα είναι ένα πολλαπλάσιο του άλλου· θετικό πολλαπλάσιο αν έχουν την ίδια φορά και αρνητικό αν έχουν αντίθετη. Υποθέστε λοιπόν ότι $\utilde{y} = \lambda\utilde{x}$ για κάποιο $\lambda \neq 0$. Αν $\lambda > 0$ τότε τα δύο διανύσματα σχηματίζουν γωνία $\theta = 0^\circ$ που έχει συνημίτονο 1 ενώ αν $\lambda < 0$ τότε σχηματίζουν γωνία $\theta = 180^\circ$ $(= \pi)$ που έχει συνημίτονο

-1. Σε οποιαδήποτε από τις δύο περιπτώσεις,

$$\frac{\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{y}}{\|\underset{\sim}{x}\|\|\underset{\sim}{y}\|} = \frac{\underset{\sim}{x}'(\lambda\underset{\sim}{x})}{\|\underset{\sim}{x}\|\|\lambda\underset{\sim}{x}\|} = \frac{\lambda}{|\lambda|}\frac{\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{x}}{\|\underset{\sim}{x}\|^2} = \frac{\lambda}{|\lambda|} = \begin{cases} 1, & \text{αν } \lambda > 0 \\ -1, & \text{αν } \lambda < 0 \end{cases} = \cos\theta$$

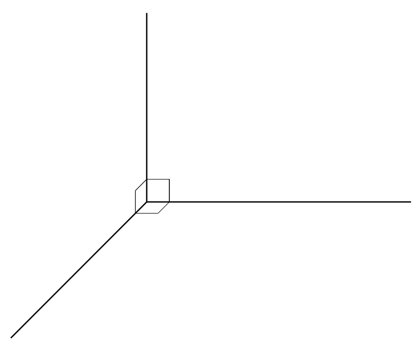
δηλαδή ο τύπος που συνδέει το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων με το συνημίτονο της γωνίας τους ισχύει και για διανύσματα με τον ίδιο φορέα.

Το σύνολο $\mathbb{R}^2$ είναι το σύνολο των διδιάστατων διανυσμάτων. Αντίστοιχα ορίζονται τα σύνολα $\mathbb{R}^3$ (το σύνολο των τριδιάστατων διανυσμάτων), το $\mathbb{R}^4$ (των τετραδιάστατων) και, γενικότερα, το $\mathbb{R}^n$ (των n-διάστατων) όπου $n \geqslant 1$ κάποιος θετικός ακέραιος. Στη γενική περίπτωση έχουμε

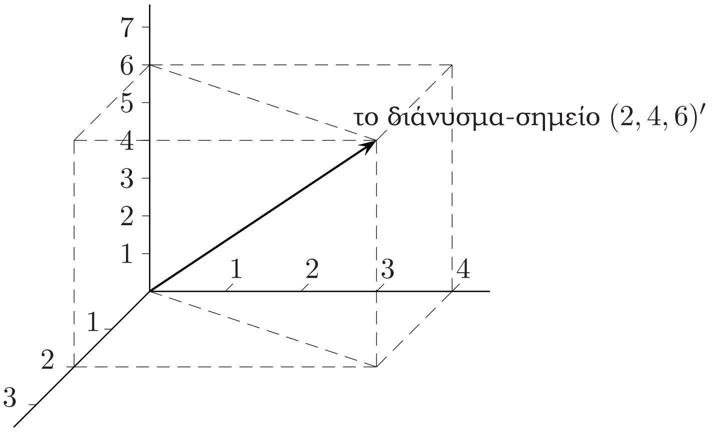
$$\mathbb{R}^n \equiv \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ φορές}} = \{\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n)'; x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Στη συνέχεια θα δούμε αναλυτικότερα το σύνολο $\mathbb{R}^3$ («αρ τρίτης» ή και «αρ κύβος»)

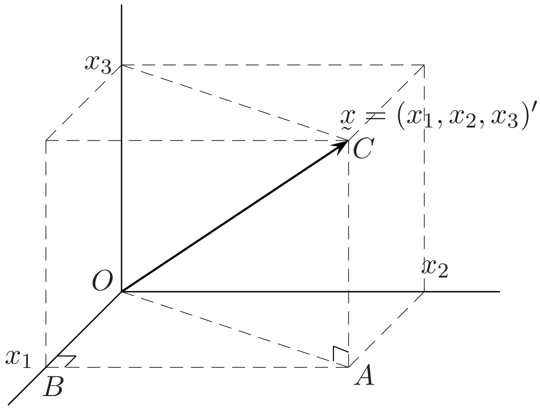
Η αναπαράσταση σημείων και διανυσμάτων του $\mathbb{R}^2$ σε χαρτί, σε πίνακα ή στην οθόνη του υπολογιστή είναι πολύ εύκολη υπόθεση μια και πρόκειται για απεικόνιση ενός διδιάστατου συνόλου σε διδιάστατα αντικείμενα. Για την αναπαράσταση του $\mathbb{R}^3$ στο χαρτί ή στα άλλα προαναφερθέντα μέσα χρειάζεται λίγη φαντασία γιατί πρόκειται για αναπαράσταση τριών διαστάσεων σε δύο διαστάσεις. Κατ' αρχάς όπως στον $\mathbb{R}^2$ επιλέγουμε ένα σημείο αναφοράς, την «αρχή», και θεωρούμε δύο άξονες που τέμνονται κάθετα σε αυτό, το ίδιο κάνουμε και για την αναπαράσταση σημείων και διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^3$: θεωρούμε τρεις άξονες που τέμνονται κάθετα στο σημείο $\underset{\sim}{0} = (0, 0, 0)'$. Οι τρεις κάθετοι ανά δύο άξονες σχεδιάζονται συνήθως όπως στο σχήμα δεξιά με την πρώτη διάσταση να αντιστοιχεί στον άξονα που φαίνεται διαγώνιος, η δεύτερη σε αυτόν που φαίνεται οριζόντιος και η τρίτη σε αυτόν που φαίνεται κάθετος. Αν δεν μπορείτε να καταλάβετε αμέσως αυτό το σχήμα σταθείτε στη μέση ενός ορθογωνίου δωματίου και κοιτάξτε την κάτω αριστερά γωνία του. Εκεί είναι το σημείο τομής τριών ευθειών: της άκρης του πατώματος που βρίσκεται αριστερά σας (ο πρώτος άξονας), της άκρης του πατώματος που βρίσκεται απέναντί σας (ο δεύτερος άξονας), και της ευθείας που είναι η τομή των δύο τοίχων (ο τρίτος άξονας). Αυτές ξέρετε ότι είναι κάθετες ανά δύο. Εν τούτοις, λόγω της θέσης στην οποία βρίσκεστε, η μόνη γωνία που πραγματικά βλέπετε ορθή είναι αυτή που σχηματίζουν ο δεύτερος και ο τρίτος άξονας· τις άλλες δύο τις βλέπετε αμβλείες. Αυτό ακριβώς προσπαθούμε να αναπαραστήσουμε με αυτό το σχήμα.



Για να βρούμε τις συντεταγμένες ενός σημείου όταν έχουμε ένα τέτοιο σύστημα αξόνων φέρνουμε κάθετες από το σημείο σε κάθε έναν από τους τρεις άξονες όπως στο ακόλουθο παράδειγμα:



Στο δωμάτιο που λέγαμε πριν, φανταστείτε το βελάκι να ξεκινάει από την κάτω αριστερά γωνία (το σημείο τομής των τριών αξόνων) και να καταλήγει μπροστά σας λίγο ψηλότερα από το κεφάλι σας.



Ας δούμε ποιο είναι το μήκος ενός διανύσματος του $\mathbb{R}^3$. Στο σχήμα δεξιά έχουμε το διάνυσμα $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, x_3)'$. Το διάνυσμα είναι υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου OAC (είναι η πλευρά OC) που έχει κάθετες πλευρές τις OA και AC η οποία έχει μήκος $|x_3|$. Επομένως, το Πυθαγόρειο Θεώρημα δίνει $\|\underset{\sim}{x}\|^2 = (\text{μήκος}\, OA)^2 + x_3^2$. Το μήκος της OA μπορούμε να το βρούμε από το ορθογώνιο τρίγωνο OAB όπου σε αυτό η OA είναι η υποτείνουσα και οι κάθετες πλευρές οι OB με μήκος $|x_1|$ και η AB με μήκος $|x_2|$. Εκεί το Πυθαγόρειο Θεώρημα δίνει $(\text{μήκος}\, OA)^2 = x_1^2 + x_2^2$. Αντικαθιστώντας το στην προηγούμενη σχέση παίρνουμε $\|\underset{\sim}{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Παρατηρήστε ότι όπως και στα διδιάστατα διανύσματα, έτσι κι εδώ έχουμε $\|\underset{\sim}{x}\|^2 = \underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{x}$. Επομένως,

$$\textit{το μήκος του } \underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, x_3)' \textit{ ισούται με } \|\underset{\sim}{x}\| = \sqrt{\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \Big(\sum_{i=1}^{3} x_i^2\Big)^{1/2}$$

Το σύνολο $\mathbb{R}^4$ και, γενικότερα, το σύνολο $\mathbb{R}^n$ για $n \geqslant 4$ δεν είναι εύκολο να το αναπαραστήσουμε γραφικά. Για τα σημεία-διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ χρειαζόμαστε n άξονες που τέμνονται κάθετα στο σημείο $\underset{n\times 1}{\underset{\sim}{0}} = (0, \ldots, 0)'$ και αυτό είναι αδύνατον να το κάνουμε στο χαρτί για μεγάλα n. Εν τούτοις, θεωρούμε ότι τα n-διάστατα αντικείμενα μπορούν να αναπαρασταθούν σε ένα τέτοιο σύστημα συντεταγμένων παρ' όλο που δεν γίνεται να το σχεδιάσουμε. Το μήκος ενός n-διάστατου διανύσματος δίνεται από την ίδια σχέση που δίνει το μήκος των διδιάστατων και τριδιάστατων διανυσμάτων:

$$\textit{το μήκος του } \underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n)' \textit{ ισούται με } \|\underset{\sim}{x}\| = \sqrt{\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2}$$

(Αυτό δεν είναι κάτι «φανταστικό», μπορεί να αποδειχθεί εφαρμόζοντας $n-1$ φορές το Πυθαγόρειο Θεώρημα όπως κάναμε και στις τρεις διαστάσεις όπου το εφαρμόσαμε δύο φορές.) Από το παραπάνω βλέπουμε ότι το μήκος είναι μη αρνητικός αριθμός και ότι το μοναδικό n-διάστατο διάνυσμα που έχει μήκος ίσο με μηδέν είναι το μηδενικό:

$$\|\underset{\sim}{x}\| \geqslant 0, \forall \underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n \quad \text{και ισχύει} \quad \|\underset{\sim}{x}\| = 0 \Leftrightarrow \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}.$$

Έστω τώρα δύο διανύσματα $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n)', \underset{\sim}{y} = (y_1, \ldots, y_n)'$ του $\mathbb{R}^n$ (για οποιοδήποτε $n \geqslant 2$) τα οποία δεν έχουν τον ίδιο φορέα. Όπως γνωρίζουμε, δύο τεμνόμενες ευθείες ορίζουν πάντα ένα (διδιάστατο) επίπεδο. Επομένως, ανεξαρτήτως διάστασης, δύο οποιαδήποτε μη συνευθειακά διανύσματα ορίζουν ένα και μοναδικό επίπεδο. Έστω θ η γωνία που σχηματίζουν πάνω σε αυτό το επίπεδο. Μπορεί να δειχθεί ότι το συνημίτονό της δίνεται από τον ίδιο τύπο όπως και για τα διδιάστατα διανύσματα:

$$\cos\theta = \frac{\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{y}}{\|\underset{\sim}{x}\|\|\underset{\sim}{y}\|} = \frac{x_1y_1 + \cdots + x_ny_n}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}}$$

Για παράδειγμα τα διανύσματα $\underset{\sim}{x} = (0, -1, 1, 2, -2)', \underset{\sim}{y} = (2, -1, 0, -1, 2)'$ του $\mathbb{R}^5$ σχηματίζουν γωνία με συνημίτονο

$$\frac{(0)(2) + (-1)(-1) + (1)(0) + (2)(-1) + (-2)(2)}{\sqrt{(0)^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + 2^2}\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2 + (-1)^2 + 2^2}} = -\frac{1}{2}$$

Αφού έχει αρνητικό συνημίτονο, η γωνία είναι αμβλεία· πιο συγκεκριμένα ισούται με $2\pi/3$, δηλαδή με $120°$. Ως ένα ακόμη παράδειγμα θεωρήστε τα διανύσματα $\underset{\sim}{u} = (-2, 3, 1, 1)', \underset{\sim}{v} = (0, -1, 0, 3)'$ του $\mathbb{R}^4$. Το εσωτερικό τους γινόμενο ισούται με $\underset{\sim}{u}'\underset{\sim}{v} = (-2)(0) + (3)(-1) + (1)(0) + (1)(3) = 0$ επομένως είναι ορθογώνια (δηλαδή κάθετα μεταξύ τους).

8 Τετραγωνικοί πίνακες (συνέχεια)

8.1 Ορθογώνιοι πίνακες

Ένας τετραγωνικός πίνακας $\underset{n\times n}{A}$ καλείται **ορθογώνιος** αν ο αντίστροφός του είναι ο ανάστροφός του, αν δηλαδή

$$A^{-1} = A'$$

Αν γράψουμε $A = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_1 & \underset{\sim}{a}_2 & \cdots & \underset{\sim}{a}_n \end{pmatrix}$ με $\underset{\sim}{a}_1, \ldots, \underset{\sim}{a}_n \in \mathbb{R}^n$, έχουμε $A' = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_1' \\ \underset{\sim}{a}_2' \\ \vdots \\ \underset{\sim}{a}_n' \end{pmatrix}$ και

$$A'A = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_1' \\ \underset{\sim}{a}_2' \\ \vdots \\ \underset{\sim}{a}_n' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_1 & \underset{\sim}{a}_2 & \cdots & \underset{\sim}{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\underset{\sim}{a}_1\|^2 & \underset{\sim}{a}_1'\underset{\sim}{a}_2 & \cdots & \underset{\sim}{a}_1'\underset{\sim}{a}_n \\ \underset{\sim}{a}_2'\underset{\sim}{a}_1 & \|\underset{\sim}{a}_2\|^2 & \cdots & \underset{\sim}{a}_2'\underset{\sim}{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underset{\sim}{a}_n'\underset{\sim}{a}_1 & \underset{\sim}{a}_n'\underset{\sim}{a}_2 & \cdots & \|\underset{\sim}{a}_n\|^2 \end{pmatrix}$$

Αν ο A είναι ορθογώνιος έχουμε επίσης

$$A'A = A^{-1}A = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Συνδυάζοντας τις δύο εκφράσεις για τον $A'A$ συμπεραίνουμε ότι *οι στήλες ενός ορθογώνιου πίνακα είναι μοναδιαία ανά δύο κάθετα διανύσματα*, μια και τα μήκη τους ισούνται με τη μονάδα και τα εσωτερικά τους γινόμενα με το μηδέν. Ακριβώς το ίδιο ισχύει και για τις γραμμές ενός ορθογώνιου πίνακα· αυτό δείξτε το μόνοι σας εκφράζοντάς τον ορθογώνιο πίνακα A ως προς τις γραμμές του και παρατηρώντας ότι $AA' = AA^{-1} = I_n$.

Αφού ο ανάστροφος του αναστρόφου ενός πίνακα ισούται με τον ίδιο τον πίνακα, $(A')' = A$, συμπεραίνουμε ότι ο ανάστροφος ενός ορθογώνιου πίνακα είναι επίσης ορθογώνιος.

Η ορίζουσα ενός ορθογώνιου πίνακα ισούται με 1 ή με -1. Πράγματι, από τις ιδιότητες $|A'| = |A|$, $|AB| = |A||B|$, και $|I_n| = 1$ παίρνουμε

$$1 = |I_n| = |AA'| = |A||A'| = |A|^2$$

που σημαίνει ότι $|A| = 1$ ή -1.

Αν ο A είναι ορθογώνιος το ίδιο ισχύει και για τον $-A$ αφού $(-A)'(-A) = A'A = I_n$.

Ένας διαγώνιος πίνακας είναι ορθογώνιος αν και μόνον αν τα διαγώνια στοιχεία του είναι 1 ή/και -1. Μπορείτε να το αποδείξετε;

Έστω $\underset{n\times n}{A}$ ορθογώνιος πίνακας. Τότε για οποιοδήποτε $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $\|A\underset{\sim}{x}\| = \|\underset{\sim}{x}\|$, δηλαδή πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος με έναν ορθογώνιο πίνακα διατηρεί το μήκος του αναλλοίωτο. Πράγματι,

$$\|A\underset{\sim}{x}\|^2 = (A\underset{\sim}{x})'(A\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{x}'A'A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}'I_n\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{x} = \|\underset{\sim}{x}\|^2$$

Επίσης, αν πολλαπλασιάσουμε δύο διανύσματα $\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in \mathbb{R}^n$ με τον ίδιο ορθογώνιο πίνακα τότε η γωνία τους παραμένει αναλλοίωτη αφού

$$(A\underset{\sim}{x})'(A\underset{\sim}{y}) = \underset{\sim}{x}'A'A\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x}'I_n\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{y}$$

και όπως δείξαμε προηγουμένως $\|A\underset{\sim}{x}\| = \|\underset{\sim}{x}\|$, $\|A\underset{\sim}{y}\| = \|\underset{\sim}{y}\|$, άρα $\dfrac{(A\underset{\sim}{x})'(A\underset{\sim}{y})}{\|A\underset{\sim}{x}\|\|A\underset{\sim}{y}\|} = \dfrac{\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{y}}{\|\underset{\sim}{x}\|\|\underset{\sim}{y}\|}$.

9 Γραμμική εξάρτηση και γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων

Αν $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$ είναι διανύσματα ίδιας διάστασης και $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ τότε το διάνυσμα

$$c_1\underset{\sim}{v}_1 + \cdots + c_m\underset{\sim}{v}_m$$

λέμε ότι είναι ένας **γραμμικός συνδυασμός** τους. Οι αριθμοί $c_1, \ldots, c_m$ λέγονται **συντελεστές** του γραμμικού συνδυασμού.

Να θυμηθούμε εδώ ότι αν V είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα $\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$ και $\underset{\sim}{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)'$ τότε

$$c_1\underset{\sim}{v}_1 + c_2\underset{\sim}{v}_2 + \cdots + c_m\underset{\sim}{v}_m = \begin{pmatrix}\underset{\sim}{v}_1 & \underset{\sim}{v}_2 & \cdots & \underset{\sim}{v}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_m\end{pmatrix} = V\underset{\sim}{c}.$$

Έστω διανύσματα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m \in \mathbb{R}^n$. Τα διανύσματα αυτά καλούνται **γραμμικώς εξαρτημένα** αν υπάρχουν αριθμοί $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$, *όχι όλοι μηδέν*, έτσι ώστε

$$c_1\underset{\sim}{v}_1 + \cdots + c_m\underset{\sim}{v}_m = \underset{\sim}{0}.$$

Σε διαφορετική περίπτωση, αν δηλαδή

$$c_1\underset{\sim}{v}_1 + \cdots + c_m\underset{\sim}{v}_m = \underset{\sim}{0} \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = \cdots = c_m = 0,$$

τα διανύσματα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$ καλούνται **γραμμικώς ανεξάρτητα**. Πολλές φορές, αντί να λέμε ότι τα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα ή γραμμικώς ανεξάρτητα, λέμε ότι *το σύνολο των διανυσμάτων* $\{\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m\}$ *είναι γραμμικώς εξαρτημένο ή γραμμικώς ανεξάρτητο*, αντίστοιχα.

Δεδομένου του ότι $c_1\underset{\sim}{v}_1 + \cdots + c_m\underset{\sim}{v}_m = V\underset{\sim}{c}$ όπου V ο πίνακας με στήλες $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$ και $\underset{\sim}{c} = (c_1, \ldots, c_m)'$, οι παραπάνω ορισμοί μας λένε ότι

τα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα	$\Leftrightarrow$	το ομογενές σύστημα $V\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση

Να επισημάνω εδώ ότι αυτό που γράφει στο παραπάνω πλαίσιο είναι ισοδύναμο με το «τα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα $\Leftrightarrow$ το ομογενές σύστημα $V\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ έχει και άλλες λύσεις εκτός της τετριμμένης».

Αν ένα από τα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$ είναι το $\underset{\sim}{0}$ τότε είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Πράγματι, αν θέσουμε τον συντελεστή του $\underset{\sim}{0}$ ίσον με $c \neq 0$ και τους συντελεστές όλων των υπολοίπων διανυσμάτων ίσους με μηδέν τότε ο αντίστοιχος γραμμικός συνδυασμός τους ισούται με $\underset{\sim}{0}$ χωρίς όλοι οι συντελεστές να είναι 0, π.χ.

$$0\underset{\sim}{v}_1 + \cdots + 0\underset{\sim}{v}_k + c\underset{\sim}{0} = \underset{\sim}{0}$$

Διανύσματα με τον ίδιο φορέα είναι πάντα γραμμικώς εξαρτημένα. Πράγματι, αν $\underset{\sim}{x} = \lambda\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{y} = \mu\underset{\sim}{v}$ με $\underset{\sim}{v} \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τότε $\mu\underset{\sim}{x} - \lambda\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{0}$ χωρίς να είναι απαραίτητο τα λ, μ να είναι μηδέν. Αντιθέτως, δύο μη συνευθειακά διανύσματα είναι πάντα γραμμικώς ανεξάρτητα. Πράγματι, έστω $\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}$ δύο διανύσματα με διαφορετικούς φορείς. Τότε, για οποιαδήποτε $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, το διάνυσμα $c_1\underset{\sim}{x}$ παραμένει στον φορέα του $\underset{\sim}{x}$ και το διάνυσμα $c_2\underset{\sim}{y}$ παραμένει στον φορέα του $\underset{\sim}{y}$, επομένως το διάνυσμα $c_1\underset{\sim}{x} + c_2\underset{\sim}{y}$ που προκύπτει από τον κανόνα του παραλληλογράμμου δεν μπορεί να είναι το $\underset{\sim}{0}$ παρά μόνον αν $c_1 = c_2 = 0$. (Δείτε τα αυτά σχεδιάζοντας κατάλληλα σχήματα.)

Ένα μη μηδενικό διάνυσμα, μόνο του, είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Πράγματι, αν $\underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{0}$ τότε έχουμε $c\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \Leftrightarrow c = 0$. (Το γινόμενο $c\underset{\sim}{x}$ μπορεί να θεωρηθεί ως «γραμμικός συνδυασμός» μόνο του διανύσματος $\underset{\sim}{x}$.)

Αν κάποια διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε τουλάχιστον ένα από αυτά γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Πράγματι, έστω $c_1\underset{\sim}{v}_1 + c_2\underset{\sim}{v}_2 + \cdots + c_m\underset{\sim}{v}_m = \underset{\sim}{0}$ χωρίς όλα τα c_i να είναι μηδέν. Υποθέστε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $c_1 \neq 0$. Τότε μπορούμε να διαιρέσουμε με c_1 και να πάρουμε

$$c_1\underset{\sim}{v}_1 + c_2\underset{\sim}{v}_2 + \cdots + c_m\underset{\sim}{v}_m = \underset{\sim}{0} \;\Leftrightarrow\; \underset{\sim}{v}_1 + \frac{c_2}{c_1}\underset{\sim}{v}_2 + \cdots + \frac{c_m}{c_1}\underset{\sim}{v}_m = \underset{\sim}{0} \;\Leftrightarrow\; \underset{\sim}{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\underset{\sim}{v}_2 - \cdots - \frac{c_m}{c_1}\underset{\sim}{v}_m$$

(Η γενικότητα δεν βλάπτεται υποθέτοντας ότι $c_1 \neq 0$ γιατί ο στόχος είναι να δείξουμε ότι ένα *οποιοδήποτε* από τα διανύσματα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Ούτως ή άλλως τουλάχιστον ένα από τα c_i είναι διάφορο του μηδενός οπότε διαιρώντας με το συγκεκριμένο c_i θα μπορούσαμε να γράψουμε το αντίστοιχο διάνυσμα ως γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων όπως ακριβώς κάναμε με το $\underset{\sim}{v}_1$.)

Ένα σύνολο μη μηδενικών διανυσμάτων που είναι ανά δύο κάθετα μεταξύ τους είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Πράγματι, αν $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m \in \mathbb{R}^n$ είναι ανά δύο κάθετα μη μηδενικά διανύσματα, δηλαδή αν $\underset{\sim}{v}_i' \underset{\sim}{v}_j = 0$ για κάθε $i \neq j$ με $\underset{\sim}{v}_i \neq \underset{\sim}{0}$ για κάθε i, τότε κανένα από αυτά δεν μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων (και συνεπώς δεν γίνεται αυτό που δείξαμε στην αμέσως προηγούμενη παράγραφο). Για να το δείτε αυτό υποθέστε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι για το πρώτο από αυτά ισχύει $\underset{\sim}{v}_1 = c_2 \underset{\sim}{v}_2 + \cdots + c_m \underset{\sim}{v}_m$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{v}_1 = c_2 \underset{\sim}{v}_2 + \cdots + c_m \underset{\sim}{v}_m &\Rightarrow \underset{\sim}{v}_1' \underset{\sim}{v}_1 = \underset{\sim}{v}_1'(c_2 \underset{\sim}{v}_2 + \cdots + c_m \underset{\sim}{v}_m) \\
&\quad \text{(πολλαπλασιάζω από αριστερά και τα δύο μέλη με το } \underset{\sim}{v}_1'\text{)} \\
&\Leftrightarrow \|\underset{\sim}{v}_1\|^2 = c_2(\underset{\sim}{v}_1' \underset{\sim}{v}_2) + \cdots + c_m(\underset{\sim}{v}_1' \underset{\sim}{v}_m) \\
&\quad \text{(εφαρμόζω την επιμεριστική ιδιότητα)} \\
&\Leftrightarrow \|\underset{\sim}{v}_1\|^2 = 0 \Leftrightarrow \underset{\sim}{v}_1 = \underset{\sim}{0} \\
&\quad \text{(μήκος μηδέν έχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα)}
\end{aligned}$$

κάτι που έχει αποκλειστεί από την αρχή.

Αν ένα σύνολο διανυσμάτων είναι γραμμικώς ανεξάρτητο τότε οποιοδήποτε υποσύνολό του είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητο. Για παράδειγμα, αν τα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_k, \underset{\sim}{v}_{k+1}, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε τα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Πράγματι, αν τα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_k$ ήταν γραμμικώς εξαρτημένα τότε θα υπήρχαν σταθερές $c_1, \ldots, c_k$, όχι όλες μηδέν, έτσι ώστε $c_1 \underset{\sim}{v}_1 + \cdots + c_k \underset{\sim}{v}_k = \underset{\sim}{0}$. Αλλά τότε θα μπορούσαμε να γράψουμε $c_1 \underset{\sim}{v}_1 + \cdots + c_k \underset{\sim}{v}_k + 0 \underset{\sim}{v}_{k+1} + \cdots + 0 \underset{\sim}{v}_m = \underset{\sim}{0}$ που σημαίνει ότι θα μπορούσαμε να βρούμε γραμμικό συνδυασμό των $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$ με συντελεστές που δεν είναι όλοι 0 που να ισούται με το $\underset{\sim}{0}$. Αυτό θα σήμαινε ότι τα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την αρχική υπόθεση της γραμμικής ανεξαρτησίας τους.

Αν ένα σύνολο διανυσμάτων είναι γραμμικώς εξαρτημένο τότε οποιοδήποτε υπερσύνολό του είναι επίσης γραμμικώς εξαρτημένο. Για παράδειγμα, αν τα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε τα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m, \underset{\sim}{v}_{m+1}, \ldots, \underset{\sim}{v}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Πράγματι, το γεγονός ότι τα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα σημαίνει ότι υπάρχουν σταθερές $c_1, \ldots, c_m$, όχι όλες μηδέν, έτσι ώστε $c_1 \underset{\sim}{v}_1 + \cdots + c_m \underset{\sim}{v}_m = \underset{\sim}{0}$. Αλλά τότε, $c_1 \underset{\sim}{v}_1 + \cdots + c_k \underset{\sim}{v}_m + 0 \underset{\sim}{v}_{m+1} + \cdots + 0 \underset{\sim}{v}_n = \underset{\sim}{0}$ που σημαίνει ότι τα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα για το πλήθος των λύσεων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος στην σελίδα 52 μπορούμε να εξαγάγουμε τα εξής γενικά συμπεράσματα:

- Περισσότερα από n n-διάστατα διανύσματα είναι πάντα γραμμικώς εξαρτημένα αφού αν $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m \in \mathbb{R}^n$ με $m > n$ και $\underset{n \times m}{V} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{v}_1 & \cdots & \underset{\sim}{v}_m \end{pmatrix}$ είναι ο πίνακας που τα έχει στήλες τότε το ομογενές σύστημα $V \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ έχει μη τετριμμένες λύσεις.
- Ακριβώς n n-διάστατα διανύσματα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνον αν ο πίνακας $\underset{n \times n}{V} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{v}_1 & \cdots & \underset{\sim}{v}_n \end{pmatrix}$ που τα έχει στήλες είναι αντιστρέψιμος αφού τότε και μόνον τότε το ομογενές σύστημα $V \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ έχει μόνον την τετριμμένη λύση.

10 Τάξη πίνακα

Αυτή η ενότητα είναι πιο θεωρητική από όσες έχουμε δει μέχρι τώρα. Οι διάφοροι ισχυρισμοί παρουσιάζονται ως μία σειρά «Αποτελεσμάτων» με την απόδειξή τους και, συνήθως, προκειμένου να αποδειχθεί κάποιο αποτέλεσμα χρησιμοποιούνται συνδυασμοί των προηγούμενων. Αυτός είναι και ο λόγος που τα έχω αριθμήσει. Μην αδιαφορείτε ποτέ για τις αποδείξεις! Πρώτον, μόνο αυτές μας πείθουν πέραν πάσης αμφιβολίας για την αλήθεια των ισχυρισμών και μας εξηγούν γιατί αυτοί ισχύουν. Δεύτερον, πρέπει να συνηθίσετε το μοτίβο ισχυρισμός-απόδειξη-ισχυρισμός-απόδειξη γιατί, όπως θα δείτε, το Πρόγραμμα Σπουδών μας έχει αρκετά Μαθηματικά.

Τάξη (rank) ενός πίνακα καλείται το (μέγιστο) πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του. Η τάξη του πίνακα A συμβολίζεται συνήθως με $\operatorname{rank}(A)$.

Ας παρατηρήσουμε πρώτα ότι αν $\operatorname{rank}(\underset{n\times m}{A}) = k$ τότε προφανώς $0 \leqslant k \leqslant m$. Ένας πίνακας έχει τάξη 0 αν και μόνον αν είναι μηδενικός (οποιωνδήποτε διαστάσεων) μια και αν είχε έστω και μία μη μηδενική στήλη τότε η τάξη του θα ήταν τουλάχιστον ένα. Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα είναι ένας πίνακας τάξης 1. Σε περίπτωση που ο $\underset{n\times m}{A}$ έχει $m \geqslant 2$ στήλες και η τάξη του είναι $k < m$ τότε κάθε σύνολο $k+1$ στηλών του A που αποτελείται από k γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες του και μία από τις υπόλοιπες $m-k$ είναι $k+1$ γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα. (Αν δεν συνέβαινε αυτό τότε η τάξη του δεν θα ήταν k, θα ήταν μεγαλύτερη.) Επομένως, βάσει αυτού που είπαμε στην σελίδα 64, κάθε μία από τις υπόλοιπες $m-k$ στήλες του πίνακα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των k γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του. Υποθέστε για ευκολία στους συμβολισμούς ότι οι k γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες του $A = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_1 & \cdots & \underset{\sim}{a}_m \end{pmatrix}$ είναι οι $\underset{\sim}{a}_1, \dots, \underset{\sim}{a}_k$ δηλαδή οι k πρώτες του. Τότε, για κάθε $j > k$ υπάρχουν $c_{1j}, \dots, c_{kj}$ ώστε $\underset{\sim}{a}_j = c_{1j}\underset{\sim}{a}_1 + \cdots + c_{kj}\underset{\sim}{a}_k = A_1\underset{\sim}{c}_j$, όπου $\underset{n\times k}{A_1} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_1 & \cdots & \underset{\sim}{a}_k \end{pmatrix}$ και $\underset{\sim}{c}_j = (c_{1j}, \dots, c_{kj})'$. Επομένως, αν ο $\underset{n\times m}{A}$ έχει k γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες και αυτές είναι οι k πρώτες του τότε

$$\underset{n\times m}{A} = (\underset{\sim}{a}_1 \ \cdots \ \underset{\sim}{a}_k \ \underset{\sim}{a}_{k+1} \ \cdots \ \underset{\sim}{a}_m) = (\underset{n\times k}{A_1} \quad \underset{n\times(m-k)}{A_2})$$

με

$$A_2 = (\underset{\sim}{a}_{k+1} \ \cdots \ \underset{\sim}{a}_m) = (A_1\underset{\sim}{c}_{k+1} \ \cdots \ A_1\underset{\sim}{c}_m) = A_1(\underset{\sim}{c}_{k+1} \ \cdots \ \underset{\sim}{c}_m) = A_1 C,$$

όπου $\underset{k\times(m-k)}{C} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{c}_{k+1} & \cdots & \underset{\sim}{c}_m \end{pmatrix}$. Ως εκ τούτου έχουμε

$$\underset{n\times m}{A} = (\underset{n\times k}{A_1} \quad \underset{n\times(m-k)}{A_1 C}) = \underset{n\times k}{A_1}(\underset{k\times k}{I_k} \quad \underset{k\times(m-k)}{C}).$$

Να σημειωθεί εδώ ότι αφού $A = A_1(I_k \ \ C)$, για τον ανάστροφό του ισχύει

$$A' = \big(A_1(I_k \ \ C)\big)' = (I_k \ \ C)'A_1' = \begin{pmatrix} I_k \\ C' \end{pmatrix} A_1'.$$

Αποτέλεσμα 10.1. Έστω $\underset{n\times m}{A}, \underset{m\times \ell}{B}$ πίνακες τέτοιοι ώστε το γινόμενο $\underset{n\times\ell}{AB}$ να έχει νόημα. Ισχύουν τα εξής:

(α) Αν $\operatorname{rank}(A) = m$ και $\operatorname{rank}(B) = \ell$ τότε $\operatorname{rank}(AB) = \ell$. (Δηλαδή αν ο A και ο B έχουν γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες τότε το γινόμενο AB έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες.)

(β) Αν $\operatorname{rank}(B) < \ell$ τότε $\operatorname{rank}(AB) < \ell$. (Δηλαδή αν ο B έχει γραμμικώς εξαρτημένες στήλες τότε το γινόμενο AB έχει γραμμικώς εξαρτημένες στήλες.)

Απόδειξη. (α) Βάσει αυτών που είπαμε στην προηγούμενη ενότητα, το ότι ο A έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες συνεπάγεται ότι το ομογενές σύστημα $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση. Αντίστοιχα, το ότι ο B έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες συνεπάγεται ότι το ομογενές σύστημα $B\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση. Θεωρήστε τώρα το ομογενές σύστημα $(AB)\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{0}$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} (AB)\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{0} \Leftrightarrow A(B\underset{\sim}{y}) = \underset{\sim}{0} \Leftrightarrow B\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{0} \qquad & (\text{αφού το } A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \text{ έχει μόνο την τετριμμένη λύση}) \\ \Leftrightarrow \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{0} \qquad & (\text{αφού το } B\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{0} \text{ έχει μόνο την τετριμμένη λύση}) \end{aligned}$$

Επομένως το ομογενές σύστημα $(AB)\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση επομένως οι στήλες του AB είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
(β) Επειδή οι στήλες του B είναι γραμμικώς εξαρτημένες, το ομογενές σύστημα $B\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{0}$ έχει μη τετριμμένες λύσεις. Έστω $\underset{\sim}{y}^*$ μία μη τετριμμένη λύση του. Τότε $B\underset{\sim}{y}^* = \underset{\sim}{0} \Rightarrow A(B\underset{\sim}{y}^*) = A\underset{\sim}{0} \Leftrightarrow (AB)\underset{\sim}{y}^* = \underset{\sim}{0}$ που σημαίνει ότι το $\underset{\sim}{y}^*$ είναι μη τετριμμένη λύση και του $(AB)\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{0}$. Επομένως το $(AB)\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{0}$ έχει μη τετριμμένες λύσεις, άρα οι στήλες του AB είναι γραμμικώς εξαρτημένες. □

(Αν αναρωτιέστε τι συμβαίνει σε περίπτωση που οι στήλες του A είναι γραμμικώς εξαρτημένες και οι στήλες του B γραμμικώς ανεξάρτητες, δεν υπάρχει γενική απάντηση. Σε αυτήν την περίπτωση μπορεί οι στήλες του AB είτε να είναι γραμμικώς ανεξάρτητες είτε να είναι γραμμικώς εξαρτημένες.)

Ένα αποτέλεσμα από την Μαθηματική Λογική

Στα Μαθηματικά αποδεικνύουμε διάφορα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας ακολουθίες αληθών ισχυρισμών που ο κάθε ένας συνεπάγεται τον επόμενο όπως π.χ.

$$(\text{ισχυρισμός A}) \Rightarrow (\text{ισχυρισμός B})$$

Αν ισχύει η παραπάνω συνεπαγωγή τότε είναι ισοδύναμη με την αντίστροφη συνεπαγωγή των αρνήσεων των δύο ισχυρισμών:

$$(\text{δεν ισχύει ο ισχυρισμός B}) \Rightarrow (\text{δεν ισχύει ο ισχυρισμός A})$$

Νομίζω ότι είναι εύκολο να το καταλάβετε: Αν δεν ισχύει ο ισχυρισμός Β τότε δεν μπορεί να ισχύει ο ισχυρισμός Α γιατί αν ίσχυε ο Α τότε η πρώτη συνεπαγωγή μάς λέει ότι θα ίσχυε και ο Β.

Το (β) του Αποτελέσματος 10.1 λέει ότι αν ο πίνακας B έχει γραμμικώς εξαρτημένες στήλες τότε το γινόμενο AB έχει γραμμικώς εξαρτημένες στήλες. Εφαρμόζοντας λοιπόν αυτό που γράφει στο παραπάνω πλαίσιο συμπεραίνουμε ότι αν το γινόμενο AB έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες τότε ο B έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες.

Αποτέλεσμα 10.2. Αμοιβαία εναλλαγή στηλών ή/και γραμμών ενός πίνακα δεν μεταβάλλει την τάξη του.

Απόδειξη. Ο ισχυρισμός για την εναλλαγή στηλών είναι προφανής. Για να δούμε ότι το ίδιο ισχύει και για την εναλλαγή γραμμών έστω $\operatorname{rank}(\underset{n\times m}{A}) = k$. Αν $k = m$ τότε ο A έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες οπότε το ομογενές σύστημα $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση. Έστω B ο πίνακας που προκύπτει μετά από την εναλλαγή δύο γραμμών του A. Τότε, το σύστημα $B\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ είναι ισοδύναμο με το $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ άρα έχει και αυτό μόνο την τετριμμένη λύση οπότε $\text{rank}(B) = m = \text{rank}(A)$. Αν $k < m$ ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι οι k πρώτες στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και ας γράψουμε όπως προηγουμένως $\underset{n\times m}{A} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_1 & \cdots & \underset{\sim}{a}_k & \underset{\sim}{a}_{k+1} & \cdots & \underset{\sim}{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{n\times k}{A_1} & \underset{n\times(m-k)}{A_2} \end{pmatrix}$ με $A_1 = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_1 & \cdots & \underset{\sim}{a}_k \end{pmatrix}$ και $A_2 = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_{k+1} & \cdots & \underset{\sim}{a}_m \end{pmatrix}$. Ο $\underset{n\times k}{A_1}$ έχει k γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες ενώ, για οποιοδήποτε $j > k$, ο πίνακας $(A_1\ \underset{\sim}{a}_j)$ έχει $k+1$ γραμμικώς εξαρτημένες στήλες. Επομένως το ομογενές σύστημα $A_1\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση ενώ το ομογενές σύστημα $(A_1\ \underset{\sim}{a}_j)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ έχει και μη τετριμμένες λύσεις. Έστω B ο πίνακας που προκύπτει από την αμοιβαία εναλλαγή των γραμμών s και t του A. Γράψτε και γι' αυτόν $\underset{n\times m}{B} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{b}_1 & \cdots & \underset{\sim}{b}_k & \underset{\sim}{b}_{k+1} & \cdots & \underset{\sim}{b}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{n\times k}{B_1} & \underset{n\times(m-k)}{B_2} \end{pmatrix}$ με $B_1 = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{b}_1 & \cdots & \underset{\sim}{b}_k \end{pmatrix}$ και $B_2 = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{b}_{k+1} & \cdots & \underset{\sim}{b}_m \end{pmatrix}$. Προφανώς ο πίνακας B_1 είναι ο πίνακας που παίρνουμε αν εναλλάξουμε τις γραμμές s και t του A_1 ενώ ο πίνακας $(B_1\ \underset{\sim}{b}_j)$ είναι ο πίνακας που παίρνουμε αν εναλλάξουμε τις γραμμές s και t του $(A_1\ \underset{\sim}{a}_j)$. Ως εκ τούτου, τα ομογενή συστήματα $B_1\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ και $A_1\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ είναι ισοδύναμα και τα ομογενή συστήματα $(B_1\ \underset{\sim}{b}_j)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ και $(A_1\ \underset{\sim}{a}_j)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ είναι ισοδύναμα. Επομένως το σύστημα $B_1\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση, πράγμα που σημαίνει ότι οι στήλες του B_1 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, ενώ το σύστημα $(B_1\ \underset{\sim}{b}_j)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ έχει και μη τετριμμένες λύσεις, πράγμα που σημαίνει ότι οι στήλες του $(B_1\ \underset{\sim}{b}_j)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες. Άρα οι k πρώτες στήλες του B είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και οποιαδήποτε άλλη στήλη του είναι γραμμικώς εξαρτημένη με τις k πρώτες οπότε $\text{rank}(B) = k = \text{rank}(A)$. □

Αποτέλεσμα 10.3. Έστω $\underset{n\times m}{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$. Αν $\text{rank}(A_1) = m$ τότε $\text{rank}(A) = m$.

Απόδειξη. Αφού ο A_1 έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες, το σύστημα $A_1\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση: $A_1\underset{m\times 1}{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{0} \Leftrightarrow \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$. Θεωρήστε το σύστημα $A\underset{m\times 1}{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{0}$. Επειδή $A\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} A_1\underset{\sim}{x} \\ A_2\underset{\sim}{x} \end{pmatrix}$ θα έχουμε

$$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_1\underset{\sim}{x} \\ A_2\underset{\sim}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \end{pmatrix} \Leftrightarrow A_1\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \text{ και } A_2\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \Leftrightarrow \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$$

(αφού $A_1\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \Leftrightarrow \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$). Άρα το σύστημα $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση επομένως $\text{rank}(A) = m$. □

Το Αποτέλεσμα 10.3 μας λέει ότι αν προσθέσουμε οποιοδήποτε πλήθος γραμμών σε έναν πίνακα που έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες (όπως εδώ ο A_1) ο πίνακας που προκύπτει (εδώ ο A) έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες.

Στη συνέχεια θα δούμε μερικά σημαντικά αποτελέσματα για την τάξη πινάκων. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι οι τάξεις των A και A' συμπίπτουν. Μια που ο A' έχει στήλες τις γραμμές του A, θα έχουμε δείξει ότι για κάθε πίνακα το πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών είναι το ίδιο με το πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών του. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι και οι τάξεις των πινάκων AA' και $A'A$ συμπίπτουν με την τάξη του A. Τέλος θα δούμε σχέσεις μεταξύ της τάξης πινάκων και της τάξης του αθροίσματος και του γινομένου τους.

10.1 Για οποιαδήποτε n, m ισχύει $\operatorname{rank}(\underset{n\times m}{A}) = \operatorname{rank}(\underset{m\times n}{A'})$

Θα αποδείξουμε αυτό που λέει ο τίτλος της υποενότητας σε τρία βήματα: Πρώτα θα θεωρήσουμε την περίπτωση όπου $m = n$ και $\operatorname{rank}(A) = n$, μετά την περίπτωση όπου $m < n$ και $\operatorname{rank}(A) = m$ και τέλος την γενική περίπτωση για οποιαδήποτε n, m. Ο λόγος που θα το κάνουμε αυτό είναι ότι για την απόδειξη κάθε βήματος θα χρησιμοποιούμε το προηγούμενο.

Αποτέλεσμα 10.4. Αν ο τετραγωνικός πίνακας $\underset{n\times n}{A}$ έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες τότε και ο $\underset{n\times n}{A'}$ έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες.

Απόδειξη. Αφού ο A έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες, το ομογενές σύστημα $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση πράγμα που σημαίνει ότι $|A| \neq 0$ (μια και ο A είναι τετραγωνικός). Επειδή $|A'| = |A|$, το ομογενές σύστημα $A'\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ έχει επίσης μόνο την τετριμμένη λύση, άρα οι στήλες του A' είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. $\square$

Αποτέλεσμα 10.5. Έστω $m < n$. Αν ο $\underset{n\times m}{A}$ έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες τότε ο $\underset{m\times n}{A'}$ έχει ακριβώς m γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες.

Απόδειξη. Από την υπόθεση, ο A έχει m γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες. Έστω k το πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του A'. Θα δείξουμε ότι $k = m$.

Κατ' αρχάς, αποκλείεται να ισχύει $k > m$ γιατί οι στήλες του A' είναι m-διάστατα διανύσματα και όπως ξέρουμε περισσότερα από m m-διάστατα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Άρα $k \leqslant m$. Για ευκολία και χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι οι k γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες του A' είναι οι k πρώτες του. (Έτσι κι αλλιώς, από το Αποτέλεσμα 10.2 ξέρουμε ότι μπορούμε να κάνουμε όσες εναλλαγές γραμμών ή/και στηλών χρειαζόμαστε χωρίς να μεταβληθεί η τάξη του A ή του A'.) Έστω $\underset{m\times k}{B_1}$ ο πίνακας που αποτελείται από αυτές τις στήλες. Τότε, όπως είδαμε και στην αρχή της ενότητας, θα υπάρχει πίνακας $\underset{k\times(n-k)}{C}$ έτσι ώστε $A' = B_1(I_k \;\; C)$ και συνεπώς

$$\underset{n\times m}{A} = (A')' = \big(B_1(I_k\; C)\big)' = \begin{pmatrix} I_k \\ C' \end{pmatrix} B_1'.$$

Από την υπόθεση οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Επομένως, βάσει της παρατήρησης μετά από το πλαίσιο στη σελίδα 67, οι στήλες του $\underset{k\times m}{B_1'}$ θα πρέπει να είναι και αυτές γραμμικώς ανεξάρτητες. Όμως οι στήλες του B_1' είναι m k-διάστατα διανύσματα. Αφού είναι γραμμικώς ανεξάρτητα θα πρέπει να ισχύει $m \leqslant k$ αφού περισσότερα από k k-διάστατα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Η περίπτωση $m < k$ έχει αποκλειστεί στην αρχή της απόδειξης επομένως συμπεραίνουμε ότι $k = m$. $\square$

Αποτέλεσμα 10.6. Για οποιαδήποτε n και m: Αν ο $\underset{n\times m}{A}$ έχει k γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες και ο $\underset{m\times n}{A'}$ έχει ℓ γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες τότε $k = \ell$.

Απόδειξη. Η περίπτωση $k = m$ έχει καλυφθεί από τα Αποτελέσματα 10.4 (αν $n = m$) και 10.5 (αν $n > m$). Επίσης, τα ίδια Αποτελέσματα καλύπτουν και την περίπτωση $\ell = n$: επειδή $(A')' = A$, εφαρμόζοντάς τα με τον A' στη θέση του A παίρνουμε ότι $\ell = n$ συνεπάγεται $k = n$, επομένως και σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $k = \ell$. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $k < m$ και $\ell < n$. Για ευκολία και χωρίς βλάβη της γενικότητας θα υποθέσουμε ότι οι k πρώτες στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και οι ℓ πρώτες στήλες του A' είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. (Αυτό μπορεί να προκύψει με κατάλληλες εναλλαγές των γραμμών και στηλών του A.) Ας γράψουμε τώρα $A = (A_1 \;\; A_2) = (A_1 \;\; A_1 C) = A_1(I_k \;\; C)$, όπου $\underset{n\times k}{A_1}$ είναι ο πίνακας με τις k πρώτες στήλες του A. Τότε $A' = \begin{pmatrix} I_k \\ C' \end{pmatrix} \underset{k\times n}{A_1'}$. Θέτοντας $A' = (\underset{m\times \ell}{B_1} \;\; \underset{m\times(n-\ell)}{B_2})$ (με τον B_1 να έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες) και επίσης $D = \begin{pmatrix} I_k \\ C' \end{pmatrix}$, $A_1' = (\underset{k\times\ell}{A_{11}'} \;\; \underset{k\times(n-\ell)}{A_{21}'})$, παίρνουμε

$$A' = (B_1 \;\; B_2) = D(A_{11}' \;\; A_{21}') = (DA_{11}' \;\; DA_{21}')$$

άρα $B_1 = DA_{11}'$. Το γεγονός ότι ο B_1 έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες συνεπάγεται το ίδιο και για τον A_{11}', άρα $k \geqslant \ell$ (αφού δεν μπορεί περισσότερα από k k-διάστατα διανύσματα να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα). Αποδείξαμε λοιπόν ότι το πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του A είναι τουλάχιστον όσο το πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του A'. Αλλάζοντας τον ρόλο των A και A' (αφού $(A')' = A$), συμπεραίνουμε ότι το πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του A' είναι τουλάχιστον όσο το πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του A, δηλαδή $\ell \geqslant k$. Όμως η ταυτόχρονη ισχύς των $k \geqslant \ell$ και $\ell \geqslant k$ συνεπάγεται ότι $k = \ell$. □

Αποδείξαμε λοιπόν ότι σε κάθε περίπτωση οι πίνακες A και A' έχουν το ίδιο (μέγιστο) πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών, δηλαδή ισχύει $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A')$. Επομένως, η τάξη ενός πίνακα δεν μπορεί να υπερβαίνει και το πλήθος των γραμμών του:

$$\boxed{\operatorname{rank}(\underset{n\times m}{A}) \leqslant \min\{n, m\}.}$$

Αν $\operatorname{rank}(\underset{n\times m}{A}) = \min\{n, m\}$ τότε λέμε ότι ο A έχει **πλήρη τάξη** ή ότι **είναι πλήρους τάξης**.

Οι τετραγωνικοί πίνακες γνωρίζουμε ότι αντιστρέφονται αν και μόνον αν η ορίζουσά τους δεν είναι μηδέν. Ξέρουμε επίσης ότι σε αυτήν την περίπτωση το αντίστοιχο ομογενές σύστημα έχει μόνο την τετριμμένη λύση. Επομένως, οι στήλες (και οι γραμμές) ενός τετραγωνικού πίνακα είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, δηλαδή ο πίνακας είναι πλήρους τάξης, αν και μόνον αν αντιστρέφεται. Δηλαδή:

$$\boxed{\text{Ο πίνακας } \underset{n\times n}{A} \text{ αντιστρέφεται } \Leftrightarrow \;\; |A| \neq 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; \operatorname{rank}(A) = n.}$$

Σημείωση. Το γεγονός ότι $\operatorname{rank}(\underset{n\times m}{A}) = k < m$ σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε ακριβώς k στήλες του που να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα n-διάστατα διανύσματα με τις υπόλοιπες $m - k$ να είναι γραμμικοί συνδυασμοί αυτών. Όμως, αυτή η k-άδα γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών δεν είναι, γενικά, μοναδική. Για παράδειγμα, θεωρήστε τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Οι δύο πρώτες στήλες του, οι $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα μια που ο 2×2 πίνακας που σχηματίζουν είναι ο μοναδιαίος που έχει ορίζουσα ίση με $1 \neq 0$. Η τρίτη στήλη είναι γραμμικός συνδυασμός τους:

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Είναι όμως εύκολο να δούμε ότι και οι στήλες $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα: η ορίζουσα του πίνακα που σχηματίζουν ισούται με $2 \neq 0$. Η στήλη που απομένει είναι γραμμικός συνδυασμός τους:

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = (-1/2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (1/2)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Το ίδιο ισχύει και για τις στήλες $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ (η ορίζουσα εδώ ισούται με $-1 \neq 0$). Είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και η άλλη είναι γραμμικός συνδυασμός τους.

10.2 Για οποιαδήποτε n, m έχουμε $\mathrm{rank}(\underset{n\times m}{A}) = \mathrm{rank}(\underset{m\times m}{A'A}) = \mathrm{rank}(\underset{n\times n}{AA'})$

Η απόδειξη του ισχυρισμού που είναι και ο τίτλος αυτής της υποενότητας θα γίνει επίσης σε τρία βήματα.

Αποτέλεσμα 10.7. Έστω $m \leqslant n$. Αν $\mathrm{rank}(\underset{n\times m}{A}) = m$ τότε $\mathrm{rank}(\underset{m\times m}{A'A}) = m$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το ομογενές σύστημα $(A'A)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση και έτσι θα συμπεράνουμε ότι οι στήλες του πίνακα $A'A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Αφού $\mathrm{rank}(\underset{n\times m}{A}) = m$, ο A έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες επομένως το ομογενές σύστημα $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση: $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \Leftrightarrow \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$. Έστω τώρα $\underset{\sim}{x}$ μία λύση του συστήματος $(A'A)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$. Τότε,

$$0 = \underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{0} = \underset{\sim}{x}'(A'A\underset{\sim}{x}) = (\underset{\sim}{x}'A')(A\underset{\sim}{x}) = (A\underset{\sim}{x})'(A\underset{\sim}{x}) = \|A\underset{\sim}{x}\|^2.$$

Όπως ξέρουμε, το μήκος ενός διανύσματος είναι 0 αν και μόνον αν αυτό είναι το μηδενικό διάνυσμα. Επομένως εδώ, $A'A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \Leftrightarrow A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ που συνεπάγεται ότι $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$. □

Αποτέλεσμα 10.8. Αν $\mathrm{rank}(\underset{n\times m}{A}) = k < m$ τότε $\mathrm{rank}(\underset{m\times m}{A'A}) = k$.

Απόδειξη. Αν $k = 0$ τότε (και μόνον τότε) ο A είναι ο μηδενικός πίνακας $\underset{n\times m}{\mathrm{O}}$ επομένως $A'A = \mathrm{O}'\mathrm{O} = \underset{m\times m}{\mathrm{O}}$ που επίσης έχει τάξη 0, άρα για $k = 0$ ο ισχυρισμός όντως ισχύει. Έστω τώρα $k \geqslant 1$. Θα υποθέσουμε για ευκολία και χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι οι k πρώτες στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Τότε,

$$A = (\underset{n\times k}{A_1} \;\; \underset{n\times(m-k)}{A_2}) = (A_1 \;\; A_1C)$$

και

$$\underset{m\times m}{A'A} = A'(A_1 \;\; A_1C) = (\underset{m\times k}{A'A_1} \;\; \underset{m\times(m-k)}{A'A_1C})$$

που σημαίνει ότι οι $m-k$ τελευταίες στήλες του $A'A$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των k πρώτων. Άρα $\text{rank}(A'A) = \text{rank}(A'A_1) \leqslant k$, δηλαδή το πολύ k από τις στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Όμως,

$$A'A_1 = \begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \end{pmatrix} A_1 = \begin{pmatrix} A_1'A_1 \\ A_2'A_1 \end{pmatrix}.$$

Αφού $\text{rank}(\underset{n\times k}{A_1}) = k$, από το Αποτέλεσμα 10.7 έχουμε ότι $\text{rank}(A_1'A_1) = k$. Από την παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι ο $A'A_1$ είναι ένας πίνακας που προκύπτει προσθέτοντας γραμμές κάτω από τον $A_1'A_1$ ο οποίος έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες. Επομένως, από το Αποτέλεσμα 10.3, και ο $\underset{m\times k}{A'A_1}$ έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες που σημαίνει ότι η τάξη του (που είναι και τάξη του $A'A$) ισούται με k. □

Αποτέλεσμα 10.9. Αν $\text{rank}(\underset{n\times m}{A}) = k \leqslant \min\{n, m\}$ τότε $\text{rank}(\underset{n\times n}{AA'}) = k$.

Απόδειξη. Στα Αποτελέσματα 10.7 και 10.8 αποδείξαμε ότι ο $A'A$ έχει την ίδια τάξη με τον A, οποιαδήποτε και αν είναι αυτή. Εφαρμόζοντάς τα στον πίνακα A' αντί για τον A παίρνουμε ότι ο $(A')'A' = AA'$ έχει την ίδια τάξη με τον A' και συνεπώς με τον A αφού ο A και ο A' έχουν την ίδια τάξη. □

Επομένως:

$$\boxed{\text{Για κάθε πίνακα } A \text{ ισχύει} \quad \text{rank}(A) = \text{rank}(A') = \text{rank}(A'A) = \text{rank}(AA').}$$

Όπως είδαμε, αν ο A έχει διαστάσεις $n \times m$ τότε η τάξη του είναι το πολύ $\min\{n, m\}$. Επομένως η τάξη των πινάκων $\underset{n\times n}{AA'}$ και $\underset{m\times m}{A'A}$, που είναι ίδια με αυτήν του A, είναι το πολύ $\min\{n, m\}$. Για παράδειγμα αν ο A έχει διαστάσεις 3×12 τότε $\text{rank}(\underset{3\times 3}{AA'}) \leqslant 3$ και $\text{rank}(\underset{12\times 12}{A'A}) \leqslant 3$.

Όπως είπαμε νωρίτερα, κάθε μη μηδενικό διάνυσμα είναι ένας πίνακας τάξης 1. Επομένως, αν $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n)' \neq \underset{\sim}{0}$ τότε ο πίνακας

$$\underset{n\times n}{\underset{\sim}{x}\underset{\sim}{x}'} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_1x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1x_n & x_2x_n & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix}$$

έχει επίσης τάξη 1.

10.3 Εύρεση της τάξης πίνακα μέσω απαλοιφής Gauss

Η απαλοιφή Gauss μπορεί να μας βοηθήσει να βρούμε εύκολα την τάξη ενός πίνακα: Η τάξη ισούται με το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών στην ισοδύναμη με αυτόν μορφή echelon. Για να το αποδείξουμε αυτό θα χρειαστούμε μία σειρά αποτελεσμάτων.

Αποτέλεσμα 10.10. Ο πολλαπλασιασμός ενός πίνακα είτε από αριστερά είτε από δεξιά με έναν αντιστρέψιμο πίνακα δεν μεταβάλλει την τάξη του.

Απόδειξη. Έστω $\operatorname{rank}(\underset{n\times m}{A}) = k$ και $\underset{n\times n}{B}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι οι πρώτες k στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και ας γράψουμε $A = (\underset{n\times k}{A_1} \ \underset{n\times(m-k)}{A_2}) = (A_1\ A_1C)$, όπως κάναμε στην αρχή της ενότητας. Τότε,

$$BA = B(A_1\ A_1C) = (BA_1\ B(A_1C)) = (\underset{n\times k}{BA_1}\ \underset{n\times(m-k)}{(BA_1)C})$$

Από το Αποτέλεσμα 10.1 οι k στήλες του BA_1 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες μια και είναι το γινόμενο δύο πινάκων που έχουν γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες: του B που είναι αντιστρέψιμος (άρα έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες) και του A_1. Οι υπόλοιπες στήλες του BA είναι στο μπλοκ $(BA_1)C$ που σημαίνει ότι είναι γραμμικοί συνδυασμοί των στηλών του BA_1. Επομένως,

$$\operatorname{rank}(BA) = \operatorname{rank}(BA_1) = k = \operatorname{rank}(A),$$

δηλαδή πολλαπλασιασμός ενός πίνακα από αριστερά με έναν αντιστρέψιμο πίνακα δεν μεταβάλλει την τάξη του.

Έστω τώρα $\underset{m\times m}{D}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Αφού (α) ο D' είναι επίσης αντιστρέψιμος, (β) ο ανάστροφος ενός πίνακα έχει την ίδια τάξη με τον πίνακα και (γ) πολλαπλασιασμός ενός πίνακα από αριστερά με έναν αντιστρέψιμο πίνακα δεν μεταβάλλει την τάξη του, θα έχουμε

$$\operatorname{rank}(AD) = \operatorname{rank}((AD)') = \operatorname{rank}(D'A') = \operatorname{rank}(A') = \operatorname{rank}(A)$$

που σημαίνει ότι ο πολλαπλασιασμός ενός πίνακα από δεξιά με έναν αντιστρέψιμο πίνακα δεν μεταβάλλει την τάξη του. □

Αποτέλεσμα 10.11. Σε κάθε βήμα της απαλοιφής Gauss παίρνουμε έναν πίνακα που έχει ίδια τάξη με τον αρχικό.

«Απόδειξη». Θα δείξουμε (για να είμαι ακριβής, *εσείς* θα δείξετε, γι' αυτό και τη λέξη Απόδειξη την έβαλα σε εισαγωγικά) ότι ο πίνακας που παίρνουμε εφαρμόζοντας έναν από τους μετασχηματισμούς της απαλοιφής Gauss (δηλαδή εναλλαγή γραμμών, πολλαπλασιασμό γραμμής με κάποιον μη μηδενικό αριθμό, πρόσθεση σε μία γραμμή ενός πολλαπλασίου μίας άλλης) είναι το γινόμενο ενός αντιστρέψιμου πίνακα επί τον πίνακα που έχουμε εκείνη τη στιγμή. Από το Αποτέλεσμα 10.10 αυτό σημαίνει ότι η τάξη των πινάκων που παίρνουμε σε όλα τα βήματα της απαλοιφής Gauss παραμένει αμετάβλητη δηλαδή είναι ίδια με του αρχικού.

- Έστω B_1 ο πίνακας που προκύπτει από την εναλλαγή των γραμμών i και j του $\underset{n\times m}{A}$ και E_1 ο πίνακας που προκύπτει από την εναλλαγή των γραμμών i και j του μοναδιαίου πίνακα I_n. Τότε ισχύει $B_1 = E_1A$ (δείξτε το). Επειδή ο E_1 είναι αντιστρέψιμος (γιατί η ορίζουσά του ισούται με -1 μια και ο E_1 έχει προκύψει με εναλλαγή γραμμών από τον I_n που έχει ορίζουσα 1) από το Αποτέλεσμα 10.10 έχουμε $\operatorname{rank}(B_1) = \operatorname{rank}(A)$.
- Έστω B_2 ο πίνακας που προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την γραμμή i του $\underset{n\times m}{A}$ επί $\lambda \neq 0$ και E_2 ο πίνακας που προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την γραμμή i του I_n επί λ. Τότε ισχύει $B_2 = E_2A$ (δείξτε το). Επειδή ο E_2 είναι αντιστρέψιμος (είναι διαγώνιος και η ορίζουσά του ισούται με $\lambda \neq 0$) από το Αποτέλεσμα 10.10 έχουμε $\operatorname{rank}(B_2) = \operatorname{rank}(A)$.

- Έστω B_3 ο πίνακας που προκύπτει προσθέτοντας στην γραμμή i του $\underset{n\times m}{A}$ την γραμμή j πολλαπλασιασμένη επί λ και E_3 ο πίνακας που προκύπτει προσθέτοντας στην γραμμή i του I_n την γραμμή j πολλαπλασιασμένη επί λ. Τότε ισχύει $B_3 = E_3 A$ (δείξτε το). Επειδή ο E_3 είναι αντιστρέψιμος (είναι άνω ή κάτω τριγωνικός και η ορίζουσά του ισούται με 1) από το Αποτέλεσμα 10.10 έχουμε $\text{rank}(B_3) = \text{rank}(A)$.

□

Αποτέλεσμα 10.12. Η τάξη ενός πίνακα διαστάσεων $n \times m$ που είναι σε μορφή echelon ισούται με το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του.

Ο παρακάτω πίνακας διαστάσεων 4×5 που βρίσκεται σε μορφή echelon έχει τρεις μη μηδενικές γραμμές και οι στήλες που βρίσκονται τα πρώτα 1 των μη μηδενικών γραμμών είναι τρεις διαφορετικές στήλες του μοναδιαίου I_4.

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\\0\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\0\\0\\0\end{matrix} & \begin{matrix}-1\\2\\0\\0\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\1\\0\end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Κάθε μία από τις υπόλοιπες στήλες του μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των τριών στηλών του I_4.

Απόδειξη. Έστω k το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών ενός πίνακα $\underset{n\times m}{E}$ που είναι σε μορφή echelon. Αφού ο E είναι σε μορφή echelon, το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε μίας από τις k μη μηδενικές γραμμές του είναι 1 και τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης του είναι μηδέν. Παρατηρήστε ότι κάθε τέτοια στήλη είναι και μία διαφορετική στήλη του I_n. Επομένως ο πίνακας περιέχει ακριβώς k από τις στήλες του μοναδιαίου πίνακα I_n. (Δείτε και το παράδειγμα στο πλαίσιο δεξιά.) Οι συγκεκριμένες στήλες είναι γραμμικώς ανεξάρτητες αφού είναι υποσύνολο των στηλών του μοναδιαίου πίνακα που είναι γραμμικώς ανεξάρτητες μια και ο μοναδιαίος είναι αντιστρέψιμος, επομένως $\text{rank}(E) \geqslant k$. Κάθε μία από τις υπόλοιπες $m - k$ στήλες του E μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των k στηλών του μοναδιαίου, επομένως η τάξη του E είναι ακριβώς k, όσες δηλαδή και οι μη μηδενικές γραμμές του. □

Από την παραπάνω απόδειξη είναι σαφές ότι το Αποτέλεσμα 10.12 είναι ισοδύναμο με το εξής:

Αποτέλεσμα 10.13. Η τάξη ενός πίνακα διαστάσεων $n \times m$ που είναι σε μορφή echelon ισούται με το πλήθος των διαφορετικών στηλών του μοναδιαίου πίνακα I_n που περιέχονται σε αυτόν.

Συνδυάζοντας τα Αποτελέσματα 10.11 και 10.12 παίρνουμε το ακόλουθο:

Αποτέλεσμα 10.14. Η τάξη ενός πίνακα ισούται με το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών της ισοδύναμης με αυτόν μορφής echelon που προκύπτει από την απαλοιφή Gauss.

Δείξτε εσείς ότι το Αποτέλεσμα 10.14 συνεπάγεται ότι

Αποτέλεσμα 10.15. Η τάξη ενός διαγώνιου πίνακα ισούται με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του.

Από την ισοδύναμη μορφή echelon ενός πίνακα μπορούμε να εντοπίσουμε και γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες του:

Αποτέλεσμα 10.16. Έστω $\text{rank}(\underset{n\times m}{A}) = k$. Οι στήλες του A που καταλήγουν στις k διαφορετικές στήλες του I_n στην ισοδύναμη μορφή echelon είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Απόδειξη. Έστω $\underset{n\times k}{A_1}$ ο πίνακας που αποτελείται από τις k στήλες που καταλήγουν στις διαφορετικές στήλες του I_n. Ο ισχυρισμός είναι αληθής αφού αν εφαρμόζαμε απαλοιφή Gauss στον A_1 θα καταλήγαμε στις συγκεκριμένες k στήλες του I_n. □

Για παράδειγμα, αν μετά από την απαλοιφή Gauss ενός πίνακα διαστάσεων 5×6 καταλήγαμε στον πίνακα $E=\begin{pmatrix}1&0&-2&0&1&0\\0&1&-1&0&3&1\\0&0&0&1&1/2&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$, τότε τόσο ο αρχικός πίνακας όσο και ο E έχουν τάξη 3 γιατί ο E έχει τρεις μη μηδενικές γραμμές. Τρεις γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες του αρχικού πίνακα είναι η πρώτη, η δεύτερη και η τέταρτη, μια και αυτές καταλήγουν στις τρεις διαφορετικές στήλες του I_5. Επίσης, τρεις άλλες γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες του αρχικού πίνακα είναι η πρώτη, η τέταρτη και η έκτη, μια και αυτές είναι τρεις διαφορετικές στήλες του I_5.

Θεωρήστε τους ακόλουθους πίνακες:

$$C=\begin{pmatrix}-1&1&3&-4&-4\\2&1&0&2&1\\0&-3&-6&6&5\\1&1&1&0&-3\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}5&-1&0&2&-1&1\\2&0&1&5&0&-2\\0&-2&1&0&2&0\\2&2&0&-1&-2&2\end{pmatrix}$$

Εφαρμόζοντας απαλοιφή Gauss δείξτε ότι $\operatorname{rank}(C)=3$, $\operatorname{rank}(D)=4$ και βρείτε τρεις και τέσσερεις γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες τους, αντίστοιχα. Υπολογίστε επίσης τους πίνακες CC' και $D'D$ και εφαρμόζοντας απαλοιφή Gauss σε αυτούς διαπιστώστε ότι $\operatorname{rank}(CC')=3$, $\operatorname{rank}(D'D)=4$.

10.4 Η τάξη αθροισμάτων και γινομένων πινάκων

Αποτέλεσμα 10.17. Για οποιουσδήποτε πίνακες $\underset{n\times m}{A}$, $\underset{m\times k}{B}$ ισχύει

$$\operatorname{rank}(AB)\leqslant\min\{\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\}.$$

(Η σχέση $\operatorname{rank}(AB)\leqslant\min\{\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\}$ σημαίνει ότι $\operatorname{rank}(AB)\leqslant\operatorname{rank}(A)$ και $\operatorname{rank}(AB)\leqslant\operatorname{rank}(B)$. Επομένως ο παραπάνω ισχυρισμός λέει ότι η τάξη του γινομένου δύο πινάκων δεν ξεπερνάει την τάξη κανενός από τους δύο πίνακες.)

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι $\operatorname{rank}(AB)\leqslant\operatorname{rank}(B)$. Σε περίπτωση που $\operatorname{rank}(B)=k$ (αν δηλαδή ο B έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες) τότε προφανώς $\operatorname{rank}(\underset{n\times k}{AB})\leqslant k=\operatorname{rank}(B)$. Έστω τώρα $\operatorname{rank}(B)=\ell<k$. Ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι οι ℓ πρώτες στήλες του B είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και ας γράψουμε $\underset{m\times k}{B}=(\underset{m\times\ell}{B_1}\ \underset{m\times(k-\ell)}{B_2})=(B_1\ B_1C)$. Τότε

$$AB=A(B_1\ B_1C)=(\underset{n\times\ell}{AB_1}\ \underset{n\times(k-\ell)}{AB_1C})$$

που σημαίνει ότι οι τελευταίες $k-\ell$ στήλες του AB είναι γραμμικοί συνδυασμοί των ℓ πρώτων. Επομένως ο AB δεν μπορεί να έχει περισσότερες γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες από όσες ο AB_1 που έχει ℓ, δηλαδή $\operatorname{rank}(AB)\leqslant\ell=\operatorname{rank}(B)$.

Για να δείξουμε ότι $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \operatorname{rank}(A)$ θεωρούμε τον ανάστροφό του, $(AB)' = B'A'$. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο στον πίνακα $B'A'$ συμπεραίνουμε ότι $\operatorname{rank}(B'A') \leqslant \operatorname{rank}(A')$, επομένως $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(B'A') \leqslant \operatorname{rank}(A') = \operatorname{rank}(A)$. □

Αποτέλεσμα 10.18. Για οποιουσδήποτε πίνακες $\underset{n\times m}{A}, \underset{n\times m}{B}$ ισχύει

$$\operatorname{rank}(A+B) \leqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

Την απόδειξη του Αποτελέσματος 10.18 θα την κάνουμε σε επόμενη ενότητα.

11 Διανυσματικοί χώροι

Έστω $\mathbb{V}$ ένα μη κενό σύνολο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ για κάποιο $n \geqslant 1$. Το σύνολο $\mathbb{V}$ καλείται **διανυσματικός χώρος** αν για οποιαδήποτε $\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \in \mathbb{V}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lambda\underset{\sim}{u} + \mu\underset{\sim}{v} \in \mathbb{V}$.

Έστω $\mathbb{V}$ ένας διανυσματικός χώρος. Από τον ορισμό προκύπτουν τα εξής:

- Κάθε διανυσματικός χώρος περιέχει το διάνυσμα $\underset{\sim}{0}$.
  Πράγματι, παίρνοντας ένα οποιοδήποτε $\underset{\sim}{u} \in \mathbb{V}$ και θέτοντας $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{u}$ και $\mu = -\lambda$, από τον ορισμό παίρνουμε ότι το $\lambda\underset{\sim}{u} + \mu\underset{\sim}{v} = \lambda\underset{\sim}{u} - \lambda\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0}$ ανήκει στο σύνολο $\mathbb{V}$.
- Όλα τα πολλαπλάσια ενός διανύσματος του $\mathbb{V}$ ανήκουν στο $\mathbb{V}$.
  Πράγματι, παίρνοντας ένα οποιοδήποτε $\underset{\sim}{u} \in \mathbb{V}$ και θέτοντας $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{0}$ συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ το $\lambda\underset{\sim}{u} = \lambda\underset{\sim}{u} + \mu\underset{\sim}{0}$ ανήκει στο $\mathbb{V}$.
- Αν $\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2, \ldots, \underset{\sim}{v}_m \in \mathbb{V}$ και $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ τότε το διάνυσμα $c_1\underset{\sim}{v}_1 + c_2\underset{\sim}{v}_2 + \cdots + c_m\underset{\sim}{v}_m$ ανήκει στο $\mathbb{V}$.
  Για να το δούμε αυτό, κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι το $c_1\underset{\sim}{v}_1 + c_2\underset{\sim}{v}_2$ ανήκει στο $\mathbb{V}$. Αυτό συνεπάγεται ότι το $(c_1\underset{\sim}{v}_1 + c_2\underset{\sim}{v}_2) + c_3\underset{\sim}{v}_3 = c_1\underset{\sim}{v}_1 + c_2\underset{\sim}{v}_2 + c_3\underset{\sim}{v}_3$ ανήκει επίσης στο $\mathbb{V}$. Αυτό συνεπάγεται ότι το $(c_1\underset{\sim}{v}_1 + c_2\underset{\sim}{v}_2 + c_3\underset{\sim}{v}_3) + c_4\underset{\sim}{v}_4 = c_1\underset{\sim}{v}_1 + c_2\underset{\sim}{v}_2 + c_3\underset{\sim}{v}_3 + c_4\underset{\sim}{v}_4$ ανήκει επίσης στο $\mathbb{V}$ κ.ο.κ. μέχρι να φτάσουμε στο m.

Επομένως, *ένα σύνολο διανυσμάτων είναι διανυσματικός χώρος αν περιέχει όλους τους δυνατούς γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων του.*

Το σύνολο $\mathbb{R}^n$ είναι ένας διανυσματικός χώρος μια και αν $\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in \mathbb{R}^n$ τότε $\lambda\underset{\sim}{x} + \mu\underset{\sim}{y} \in \mathbb{R}^n$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Το σύνολο που περιέχει μόνο το $\underset{n\times 1}{\underset{\sim}{0}}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος.

Το σύνολο που αποτελείται από τα πολλαπλάσια ενός διανύσματος είναι ένας διανυσματικός χώρος. Πράγματι, έστω $\mathbb{V}$ το σύνολο που αποτελείται από τα πολλαπλάσια του διανύσματος $\underset{\sim}{v}$. Αν $\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in \mathbb{V}$, αν δηλαδή $\underset{\sim}{x} = c\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{y} = d\underset{\sim}{v}$ για κάποια $c, d \in \mathbb{R}$, και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τότε $\lambda\underset{\sim}{x} + \mu\underset{\sim}{y} = \lambda(c\underset{\sim}{v}) + \mu(d\underset{\sim}{v}) = (\lambda c + \mu d)\underset{\sim}{v}$ δηλαδή είναι ένα πολλαπλάσιο του $\underset{\sim}{v}$ άρα ανήκει στο $\mathbb{V}$.

Το σύνολο των λύσεων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος είναι ένας διανυσματικός χώρος. Πράγματι, θεωρήστε το ομογενές γραμμικό σύστημα $\underset{n\times m}{A}\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$. Αν $\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}$ είναι λύσεις του συστήματος, δηλαδή αν ισχύει $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$, $A\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{0}$, τότε για οποιαδήποτε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ το $\lambda\underset{\sim}{x} + \mu\underset{\sim}{y}$ είναι επίσης λύση του συστήματος αφού $A(\lambda\underset{\sim}{x} + \mu\underset{\sim}{y}) = \lambda A\underset{\sim}{x} + \mu A\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{0}$.

Το σύνολο όλων των διανυσμάτων που είναι κάθετα στα διανύσματα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$ είναι ένας διανυσματικός χώρος. Πράγματι, αν $\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}$ είναι διανύσματα που είναι κάθετα στα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$, δηλαδή αν $\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{v}_j = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{v}_j = 0$ για $j = 1, \ldots, m$, και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τότε το διάνυσμα $\lambda\underset{\sim}{x} + \mu\underset{\sim}{y}$ είναι επίσης κάθετο στα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$ αφού $(\lambda\underset{\sim}{x} + \mu\underset{\sim}{y})'\underset{\sim}{v}_j = \lambda\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{v}_j + \mu\underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{v}_j = 0$, για $j = 1, \ldots, m$.

11.1 Υπόχωρος διανυσματικού χώρου

Ένα υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου λέμε ότι είναι **υπόχωρός** του αν είναι και αυτό ένας διανυσματικός χώρος.

Αφού κάθε σύνολο είναι υποσύνολο του εαυτού του, ένας διανυσματικός χώρος είναι υπόχωρος του εαυτού του.

Αν ένας διανυσματικός χώρος είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ τότε είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Το μονοσύνολο $\{ \underset{n\times 1}{\underset{\sim}{0}} \}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Το σύνολο των λύσεων ενός ομογενούς συστήματος n εξισώσεων με m αγνώστους είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ μια και προφανώς είναι υποσύνολό του και, όπως δείξαμε νωρίτερα, είναι διανυσματικός χώρος.

Έστω διανύσματα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m \in \mathbb{R}^n$. Το σύνολο των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ που είναι κάθετα στα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ μια και προφανώς είναι υποσύνολό του και, όπως δείξαμε νωρίτερα, είναι διανυσματικός χώρος. (Παρατηρήστε ότι το συγκεκριμένο σύνολο είναι το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος με πίνακα συντελεστών των αγνώστων τον πίνακα διαστάσεων $m \times n$ με γραμμές $\underset{\sim}{v}_1', \ldots, \underset{\sim}{v}_m'$ και επομένως το παράδειγμα αυτό συμπίπτει με το αμέσως προηγούμενο με αλλαγμένους τους ρόλους των n και m.)

Το σύνολο $\mathbb{V} = \{\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, x_3)'$ με $x_3 = 0\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Πράγματι, το $\mathbb{V}$ είναι προφανώς υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ και αν $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, 0)', \underset{\sim}{y} = (y_1, y_2, 0)'$ δύο οποιαδήποτε διανύσματα του $\mathbb{V}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τότε $\lambda\underset{\sim}{x} + \mu\underset{\sim}{y} = \lambda(x_1, x_2, 0)' + \mu(y_1, y_2, 0)' = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, 0)' \in \mathbb{V}$, άρα είναι και διανυσματικός χώρος.

11.2 Διανυσματικοί χώροι που παράγονται από σύνολα διανυσμάτων

Έστω διανύσματα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m \in \mathbb{R}^n$ και

$$\mathbb{V} = \{\underset{\sim}{w} \in \mathbb{R}^n : \underset{\sim}{w} = c_1\underset{\sim}{v}_1 + \cdots + c_m\underset{\sim}{v}_m, \text{ με } c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}\}$$

το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών τους. Το σύνολο $\mathbb{V}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος, υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Πράγματι, είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και αν $\underset{\sim}{w}, \underset{\sim}{z} \in \mathbb{V}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τότε $\lambda\underset{\sim}{w} + \mu\underset{\sim}{z} \in \mathbb{V}$. Για να το δείτε αυτό παρατηρήστε ότι αφού $\underset{\sim}{w}, \underset{\sim}{z} \in \mathbb{V}$ θα υπάρχουν $c_1, \ldots, c_m, d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\underset{\sim}{w} = c_1\underset{\sim}{v}_1 + \cdots + c_m\underset{\sim}{v}_m$ και $\underset{\sim}{z} = d_1\underset{\sim}{v}_1 + \cdots + d_m\underset{\sim}{v}_m$. Τότε,

$$\lambda\underset{\sim}{w} + \mu\underset{\sim}{z} = \lambda(c_1\underset{\sim}{v}_1 + \cdots + c_m\underset{\sim}{v}_m) + \mu(d_1\underset{\sim}{v}_1 + \cdots + d_m\underset{\sim}{v}_m) = (\lambda c_1 + \mu d_1)\underset{\sim}{v}_1 + \cdots + (\lambda c_m + \mu d_m)\underset{\sim}{v}_m$$

δηλαδή το $\lambda\underset{\sim}{w} + \mu\underset{\sim}{z}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$ επομένως ανήκει στο $\mathbb{V}$.

Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{V}$ καλείται «ο διανυσματικός χώρος που παράγεται (ή γεννιέται) από τα διανύσματα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$». Θα τον συμβολίζουμε με $\text{span}(\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m)$.

Αφού $c_1\underset{\sim}{v}_1 + \cdots + c_m\underset{\sim}{v}_m = V\underset{\sim}{c}$ όπου V ο πίνακας με στήλες τα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$ και $\underset{\sim}{c} = (c_1, \ldots, c_m)'$, είναι φανερό ότι ο χώρος $\mathbb{V}$ αποτελείται από όλα τα διανύσματα που μπορούν να γραφούν ως $V\underset{\sim}{c}$ με $\underset{\sim}{c} \in \mathbb{R}^m$. Επομένως,

το διάνυσμα $\underset{\sim}{w}$ ανήκει στον χώρο που παράγουν οι στήλες του πίνακα V	$\Leftrightarrow$	το γραμμικό σύστημα $V\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{w}$ έχει λύση.

(Η λύση του συστήματος $V\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{w}$ δεν είναι απαραίτητο να είναι μοναδική.)

Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\underset{\sim}{v} \in \mathbb{R}^n$ παράγει έναν χώρο που γεωμετρικά είναι μία ευθεία που περνάει από το $\underset{\sim}{0}$. Πράγματι, ο χώρος που παράγεται μόνο από το $\underset{\sim}{v}$ είναι το σύνολο

$$\text{span}(\underset{\sim}{v}) = \{\underset{\sim}{w} \in \mathbb{R}^n : \underset{\sim}{w} = c\,\underset{\sim}{v},\ \text{με } c \in \mathbb{R}\},$$

δηλαδή όλα τα πολλαπλάσια του $\underset{\sim}{v}$. Επομένως τα διανύσματα του χώρου που παράγεται από το $\underset{\sim}{v}$ είναι ακριβώς όσα διανύσματα έχουν τον ίδιο φορέα με το $\underset{\sim}{v}$.

Τα διανύσματα $(1,0)', (0,1)' \in \mathbb{R}^2$ (δηλαδή οι στήλες του μοναδιαίου πίνακα I_2) παράγουν το $\mathbb{R}^2$. Πράγματι κάθε $\underset{\sim}{w} = (w_1, w_2)' \in \mathbb{R}^2$ είναι γραμμικός συνδυασμός τους:

$$\underset{\sim}{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = w_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\Leftrightarrow \underset{\sim}{w} = I_2\underset{\sim}{w})$$

Όμοια, τα διανύσματα $(1,0,0)', (0,1,0)', (0,0,1)' \in \mathbb{R}^3$ (δηλαδή οι στήλες του μοναδιαίου πίνακα I_3) παράγουν τον $\mathbb{R}^3$ αφού για κάθε $\underset{\sim}{w} = (w_1, w_2, w_3)' \in \mathbb{R}^3$ ισχύει

$$\underset{\sim}{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = w_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\Leftrightarrow \underset{\sim}{w} = I_3\underset{\sim}{w})$$

Γενικά, τα διανύσματα-στήλες του μοναδιαίου πίνακα τάξης n παράγουν τον $\mathbb{R}^n$ αφού για κάθε $\underset{\sim}{w} = (w_1, \ldots, w_n)' \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\underset{\sim}{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = w_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + w_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\Leftrightarrow \underset{\sim}{w} = I_n\underset{\sim}{w})$$

Ένας χώρος δεν παράγεται από ένα μόνο σύνολο διανυσμάτων όπως μπορούμε να δούμε από το επόμενο αποτέλεσμα.

Αποτέλεσμα 11.1. Αν οι στήλες του πίνακα $\underset{n\times m}{V}$ παράγουν τον χώρο $\mathbb{V}$ και $\underset{m\times m}{B}$ είναι ένας οποιοσδήποτε αντιστρέψιμος πίνακας τότε ο $\mathbb{V}$ παράγεται και από τις στήλες του πίνακα VB.

Απόδειξη. Παρατηρήστε πρώτα ότι για οποιοδήποτε $\underset{\sim}{c} = (c_1, \ldots, c_m)'$ ισχύει $V\underset{\sim}{c} = (VB)(B^{-1}\underset{\sim}{c})$. Επομένως αν $\underset{\sim}{w} = V\underset{\sim}{c}$ τότε $\underset{\sim}{w} = (VB)\underset{\sim}{d}$ με $\underset{\sim}{d} = B^{-1}\underset{\sim}{c}$. Αντίστροφα, αν $\underset{\sim}{w} = (VB)\underset{\sim}{d}$ τότε $\underset{\sim}{w} = V\underset{\sim}{c}$ με $\underset{\sim}{c} = B\underset{\sim}{d}$. Επομένως ένα διάνυσμα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του V αν και μόνον αν γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του VB. Συνεπώς οι στήλες του V και οι στήλες του VB παράγουν τον ίδιο χώρο. $\square$

Αποτέλεσμα 11.2. Έστω $\mathbb{V} = \operatorname{span}(\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m)$. Έστω επίσης $\underset{\sim}{w}_1, \ldots, \underset{\sim}{w}_k$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{V}$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(α) $k \leqslant m$ και

(β) αν $k = m$ τότε τα $\underset{\sim}{w}_1, \ldots, \underset{\sim}{w}_m$ παράγουν επίσης τον $\mathbb{V}$.

(Με απλά λόγια: Αν ένας χώρος παράγεται από m διανύσματα τότε δεν μπορούμε να βρούμε περισσότερα από m γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα μέσα σε αυτόν· και αν υπάρχουν m γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα στον χώρο τότε τον παράγουν και αυτά.)

Απόδειξη. Έστω $V = \begin{pmatrix}\underset{\sim}{v}_1 & \cdots & \underset{\sim}{v}_m\end{pmatrix}$ ο πίνακας με στήλες τα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$ και $W = \begin{pmatrix}\underset{\sim}{w}_1 & \cdots & \underset{\sim}{w}_k\end{pmatrix}$ ο πίνακας με στήλες τα $\underset{\sim}{w}_1, \ldots, \underset{\sim}{w}_k$. Αφού τα $\underset{\sim}{w}_i$, $i = 1, \ldots, k$, ανήκουν στον $\mathbb{V}$ θα υπάρχουν διανύσματα $\underset{\sim}{c}_1, \ldots, \underset{\sim}{c}_k \in \mathbb{R}^m$ έτσι ώστε $\underset{\sim}{w}_i = V\underset{\sim}{c}_i$ (τα $\underset{\sim}{c}_i$ είναι λύσεις των γραμμικών συστημάτων $V\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{w}_i$, $i = 1, \ldots, m$). Επομένως,

$$W = \begin{pmatrix}\underset{\sim}{w}_1 & \cdots & \underset{\sim}{w}_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}V\underset{\sim}{c}_1 & \cdots & V\underset{\sim}{c}_k\end{pmatrix} = V\begin{pmatrix}\underset{\sim}{c}_1 & \cdots & \underset{\sim}{c}_k\end{pmatrix} = V \underset{m\times k}{C}$$

όπου $C = \begin{pmatrix}\underset{\sim}{c}_1 & \cdots & \underset{\sim}{c}_k\end{pmatrix}$. Βάσει της παρατήρησης μετά από το πλαίσιο στη σελίδα 67, το ότι ο $W = VC$ έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες συνεπάγεται ότι ο C έχει επίσης γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες. Οι k στήλες του C είναι m-διάστατα διανύσματα και, όπως γνωρίζουμε, περισσότερα από m m-διάστατα διανύσματα δεν μπορεί να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επομένως ισχύει $k \leqslant m$. Επίσης, αν ισχύει $k = m$ τότε ο $\underset{m\times m}{C}$ έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες άρα είναι αντιστρέψιμος (αφού είναι τετραγωνικός). Επομένως, βάσει του Αποτελέσματος 11.1, οι στήλες των πινάκων V και $W = VC$ παράγουν τον ίδιο χώρο, δηλαδή τον $\mathbb{V}$. □

11.3 Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

Ένα σύνολο διανυσμάτων του χώρου $\mathbb{V}$ λέμε ότι είναι μία **βάση** του $\mathbb{V}$ αν αυτά τα διανύσματα

(α) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα   και   (β) παράγουν τον $\mathbb{V}$.

Από τον ορισμό της βάσης και από το Αποτέλεσμα 2 της προηγούμενης ενότητας προκύπτει ότι όλες οι βάσεις ενός χώρου έχουν ακριβώς το ίδιο πλήθος διανυσμάτων. Το πλήθος των διανυσμάτων κάθε βάσης του χώρου $\mathbb{V}$ καλείται **διάσταση** του $\mathbb{V}$.

Ο συνήθης συμβολισμός της διάστασης του χώρου $\mathbb{V}$ είναι $\dim(\mathbb{V})$. (dim από τη λέξη dimension).

Τα διανύσματα $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ (οι στήλες του μοναδιαίου πίνακα I_2) αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^2$ γιατί είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (αφού $|I_2| = 1 \neq 0$) και παράγουν τον $\mathbb{R}^2$ όπως είδαμε νωρίτερα. Η βάση $\{(1,0)', (0,1)'\}$ καλείται *συνήθης βάση του* $\mathbb{R}^2$.

Γενικότερα, τα διανύσματα $(\underbrace{1, 0, \ldots, 0}_{n})', (\underbrace{0, 1, \ldots, 0}_{n})', \ldots, (\underbrace{0, 0, \ldots, 1}_{n})'$ (οι στήλες του μοναδιαίου πίνακα I_n) αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$ γιατί είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (αφού $|I_n| = 1 \neq 0$) και παράγουν τον $\mathbb{R}^n$ όπως είδαμε νωρίτερα. Η βάση $\{(\underbrace{1, 0, \ldots, 0}_{n})', (\underbrace{0, 1, \ldots, 0}_{n})', \ldots, (\underbrace{0, 0, \ldots, 1}_{n})'\}$ καλείται *συνήθης βάση του* $\mathbb{R}^n$.

Κάποιες «ειδικές» περιπτώσεις που πρέπει να έχουμε κατά νου είναι οι ακόλουθες:

- Ο χώρος που περιέχει μόνο το $\underset{\sim}{0}$ έχει διάσταση 0.
- Κάθε ευθεία που περνάει από το $\underset{\sim}{0}$ είναι ένας χώρος διάστασης 1.
- Κάθε επίπεδο που περιέχει το $\underset{\sim}{0}$ είναι ένας χώρος διάστασης 2.

Κάθε χώρος έχει τουλάχιστον μία βάση. (Αυτό ισχύει και για διανυσματικούς χώρους πολύ πιο γενικούς από αυτούς που συζητάμε στο μάθημά μας. Δεν θα το αποδείξουμε αυτό αλλά δεχτείτε το.)

Στην πραγματικότητα, κάθε χώρος έχει άπειρες βάσεις:

Αποτέλεσμα 11.3. Αν οι στήλες του πίνακα $\underset{n\times m}{A}$ είναι μία βάση του χώρου $\mathbb{V}$ (δηλαδή είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα που τον παράγουν) και $\underset{m\times m}{B}$ είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας τότε οι στήλες του πίνακα $\underset{n\times m}{W} = AB$ είναι επίσης βάση του $\mathbb{V}$.

Απόδειξη. Από το Αποτέλεσμα 10.1 ξέρουμε ότι αφού οι A και B έχουν γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες το ίδιο ισχύει και για το γινόμενό τους και από το Αποτέλεσμα 11.1 ότι αφού ο B είναι αντιστρέψιμος οι στήλες του $W = AB$ παράγουν τον ίδιο χώρο που παράγουν και οι στήλες του A. Επομένως οι στήλες του W είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και παράγουν τον $\mathbb{V}$ δηλαδή αποτελούν μία βάση του. □

Αφού οι στήλες του πίνακα I_n αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$ (τη συνήθη βάση του), το παραπάνω συνεπάγεται ότι *οι στήλες οποιουδήποτε αντιστρέψιμου πίνακα διαστάσεων* $n \times n$ *αποτελούν βάση του* $\mathbb{R}^n$. Για παράδειγμα, τα διανύσματα $(1,1)', (1,2)'$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^2$ αφού $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$, δηλαδή ο πίνακας που με στήλες αυτά είναι αντιστρέψιμος. Θα δούμε κι άλλα παραδείγματα στη συνέχεια.

Η διαφορά μιας βάσης από οποιοδήποτε σύνολο διανυσμάτων που παράγουν έναν χώρο είναι ότι *κάθε διάνυσμα του χώρου γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης με μοναδικό τρόπο* όπως φαίνεται από το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Αποτέλεσμα 11.4. Έστω $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$ μία βάση του $\mathbb{V}$. Αν

$$c_1\underset{\sim}{v}_1 + \cdots + c_m\underset{\sim}{v}_m = d_1\underset{\sim}{v}_1 + \cdots + d_m\underset{\sim}{v}_m$$

τότε $c_1 = d_1, \ldots, c_m = d_m$.

Απόδειξη. Η παραπάνω ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$(c_1 - d_1)\underset{\sim}{v}_1 + \cdots + (c_m - d_m)\underset{\sim}{v}_m = \underset{\sim}{0}$$

που συνεπάγεται $c_1 - d_1 = \cdots = c_m - d_m = 0$ μια και τα $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. □

Αν $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$ μία βάση του $\mathbb{V}$ και $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{V}$ τότε οι συντελεστές $c_1, \ldots, c_m$ του (μοναδικού βάσει του παραπάνω αποτελέσματος) γραμμικού συνδυασμού $\underset{\sim}{x} = c_1\underset{\sim}{v}_1 + \cdots + c_m\underset{\sim}{v}_m$ καλούνται **συντεταγμένες** του $\underset{\sim}{x}$ ως προς αυτήν την βάση.

Το διάνυσμα $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ έχει συντεταγμένες $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^n$ μια και

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Οι συντεταγμένες του όμως ως προς άλλες βάσεις του $\mathbb{R}^n$ είναι διαφορετικές.

Για παράδειγμα, όπως δείξαμε παραπάνω, τα διανύσματα $(1,1)', (1,2)'$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^2$. Θεωρήστε το διάνυσμα $(-2,3)' \in \mathbb{R}^2$. Οι συντεταγμένες του ως προς τη συνήθη βάση είναι $-2, 3$ αφού

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

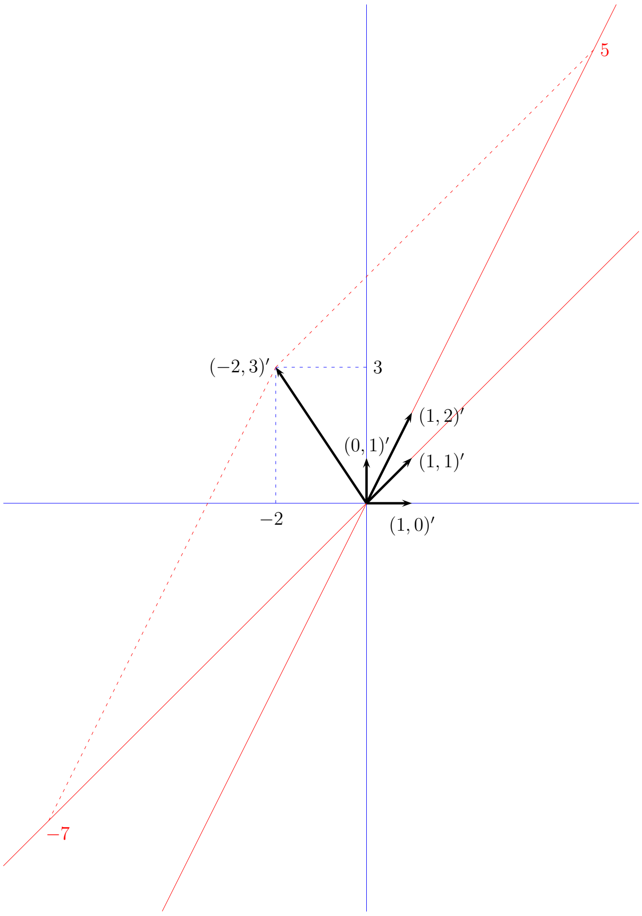
Οι συντεταγμένες του ως προς την βάση $(1,1)', (1,2)'$, δηλαδή τα (μοναδικά) c_1, c_2 για τα οποία ισχύει

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

είναι διαφορετικές από $-2, 3$. Για να τις βρούμε δεν έχουμε παρά να λύσουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Η λύση του είναι $(c_1, c_2)' = (-7, 5)'$. Άρα οι συντεταγμένες τού $(-2,3)'$ ως προς την βάση $(1,1)', (1,2)'$ είναι $-7, 5$: το $(-2,3)'$ εκφράζεται ως $(-7,5)'$ ως προς την βάση αυτήν. Δείτε τι σημαίνει αυτό στο παρακάτω σχήμα:



Οι μπλε άξονες είναι οι άξονες ως προς τη συνήθη βάση $(1,0)', (0,1)'$ ενώ οι κόκκινοι ως προς την $(1,1)', (1,2)'$. (Τα διανύσματα της κάθε βάσης φαίνονται πάνω στους αντίστοιχους άξονες.) Για να βρούμε τις συντεταγμένες τού $(-2,3)'$ σχεδιάζουμε παράλληλες ως προς τους δύο άξονες της βάσης μέχρι να τους τμήσουμε. Για τη συνήθη βάση αυτές είναι οι μπλε διακεκομμένες γραμμές που τέμνουν τους δύο μπλε άξονες στο -2 και στο 3: αυτές είναι οι συντεταγμένες τού $(-2,3)'$ ως προς τη συνήθη βάση. Η κάθε μπλε διακεκομμένη γραμμή είναι κάθετη στον άλλο άξονα μια και οι δύο άξονες είναι κάθετοι μεταξύ τους. Για την άλλη βάση οι παράλληλες προς τους δύο άξονες είναι οι κόκκινες διακεκομμένες γραμμές. Αυτές τους τέμνουν στο -7 και στο 5: αυτές είναι οι συντεταγμένες τού $(-2,3)'$ ως προς την βάση $(1,1)', (1,2)'$. Η κάθε κόκκινη διακεκομμένη δεν είναι κάθετη στον άλλο άξονα αλλά τον τέμνει με γωνία ίση με την γωνία που σχηματίζουν οι δύο άξονες μεταξύ τους.

Να και ένα δεύτερο παράδειγμα: Έστω $\mathbb{V}$ ο χώρος που παράγεται από τις στήλες του

$$\underset{4\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Τα διανύσματα αυτά αποτελούν βάση του $\mathbb{V}$ γιατί είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. (Διαπιστώστε το μόνοι σας.) Επομένως $\dim(\mathbb{V}) = 3$. Το διάνυσμα $(2,-5,7,-3)'$ ανήκει στον $\mathbb{V}$ μια και είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Οι συντεταγμένες τού $(2,-5,7,-3)'$ ως προς την παραπάνω βάση είναι οι συντελεστές $2, -2, -1$: Το $(2,-5,7,-3)'$ ως προς την παραπάνω βάση εκφράζεται ως $(2,-2,-1)'$. Μην σας παραξενεύει που ενώ το διάνυσμα $(2,-5,7,-3)'$ είναι 4-διάστατο εκφράζεται ως 3-διάστατο υπό την παραπάνω βάση: Η βάση παράγει τον χώρο $\mathbb{V}$ που έχει διάσταση 3.

Αποτέλεσμα 11.5. Έστω $\mathbb{V} = \text{span}(\underset{\sim}{a}_1, \dots, \underset{\sim}{a}_m)$ και $A = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_1 & \cdots & \underset{\sim}{a}_m \end{pmatrix}$. Τότε ισχύει

$$\dim(\mathbb{V}) = \text{rank}(A)$$

Απόδειξη. Στην περίπτωση που $\text{rank}(A) = m$, αν δηλαδή αν οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, τα $\underset{\sim}{a}_1, \dots, \underset{\sim}{a}_m$ αποτελούν βάση του $\mathbb{V}$ οπότε $\dim(\mathbb{V}) = m = \text{rank}(A)$. Αν από την άλλη πλευρά ισχύει $\text{rank}(A) = k < m$, ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι οι πρώτες k στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και ας γράψουμε όπως συνήθως $A = (\underset{n\times k}{A_1} \quad \underset{n\times(m-k)}{A_2}) = (A_1 \;\; A_1B) = A_1(I_k \;\; B)$. Αν $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{V}$ τότε θα υπάρχει $\underset{m\times 1}{\underset{\sim}{c}}$ τέτοιο ώστε $\underset{\sim}{x} = A\underset{\sim}{c}$. Ας διαμερίσουμε το $\underset{\sim}{c}$ σε δύο κομμάτια, $\underset{k\times 1}{\underset{\sim}{c}_1}$, $\underset{(m-k)\times 1}{\underset{\sim}{c}_2}$, έτσι ώστε $\underset{\sim}{c} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{c}_1 \\ \underset{\sim}{c}_2 \end{pmatrix}$. Τότε,

$$\underset{\sim}{x} = A\underset{\sim}{c} = A_1(I_k \; B)\begin{pmatrix} \underset{\sim}{c}_1 \\ \underset{\sim}{c}_2 \end{pmatrix} = A_1(\underset{\sim}{c}_1 + B\underset{\sim}{c}_2) = A_1\underset{\sim}{d} \qquad \text{με } \underset{k\times 1}{\underset{\sim}{d}} = \underset{\sim}{c}_1 + B\underset{\sim}{c}_2.$$

Επομένως το $\underset{\sim}{x}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A_1 άρα οι k στήλες του A_1 παράγουν τον $\mathbb{V}$. Επειδή είναι και γραμμικώς ανεξάρτητες αποτελούν βάση του $\mathbb{V}$. Επομένως, $\dim(\mathbb{V}) = k = \text{rank}(A)$. □

Το Αποτέλεσμα 11.5 μας λέει ότι

$$\boxed{\text{αν } \mathbb{V} = \{\underset{\sim}{x} = \underset{n\times m}{A}\underset{\sim}{c};\, \underset{\sim}{c} \in \mathbb{R}^m\} \quad \text{τότε} \quad \dim(\mathbb{V}) = \text{rank}(A).}$$

Προκειμένου να βρούμε μία βάση του χώρου που παράγεται από τις στήλες του πίνακα A αρκεί να εντοπίσουμε $\text{rank}(A)$ γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες του. Όπως ξέρουμε, αυτό μπορεί να γίνει μέσω απαλοιφής Gauss: Οι στήλες του A που καταλήγουν στις διαφορετικές στήλες του μοναδιαίου I_n που εμφανίζονται στην ισοδύναμη μορφή echelon είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Ας δούμε ένα παράδειγμα. Θεωρήστε τον παρακάτω πίνακα και τον ισοδύναμό του πίνακα σε μορφή echelon

$$\underset{6\times 5}{A} = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Εφαρμόστε απαλοιφή Gauss στον A και καταλήξτε στον E για εξάσκηση αλλά και για να βεβαιωθείτε.) Επομένως $\text{rank}(A) = 4$ μια και ο E έχει τέσσερεις μη μηδενικές γραμμές. Αυτή είναι και η διάσταση του χώρου που παράγεται από τις στήλες του A. Έστω $\mathbb{V}$ αυτός ο χώρος. Οι τέσσερεις πρώτες στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες μια και σε αυτές αντιστοιχούν οι τέσσερεις διαφορετικές στήλες του I_6 που εμφανίζονται στον E και επομένως αποτελούν βάση του $\mathbb{V}$. Ο $\mathbb{V}$ αποτελείται από όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^6$ που γράφονται ως $A\underset{\sim}{c}$, δηλαδή ως γραμμικοί συνδυασμοί των στηλών του A. Για παράδειγμα, θέτοντας $\underset{\sim}{c} = (1, 1, 1, 1, 1)'$ παίρνουμε ένα από τα διανύσματα που περιέχει ο $\mathbb{V}$, το

$$\begin{pmatrix} -2 & -10 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Για να βρούμε τις συντεταγμένες αυτού του διανύσματος ως προς την βάση του $\mathbb{V}$ που αποτελείται από τις τέσσερεις πρώτες στήλες του A λύνουμε το σύστημα

$$\begin{pmatrix} -2 & -10 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Η (μοναδική) λύση του συστήματος είναι η $(0, 2, 1, 3)'$. Αυτές είναι και οι συντεταγμένες του παραπάνω διανύσματος ως προς τη συγκεκριμένη βάση του τετραδιάστατου χώρου $\mathbb{V}$.

Μία βάση καλείται **ορθοκανονική** αν αποτελείται από ανά δύο κάθετα μοναδιαία διανύσματα (δηλαδή που έχουν μήκος 1). Για παράδειγμα, η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$ είναι ορθοκανονική μια και οι στήλες του μοναδιαίου πίνακα I_n είναι ανά δύο κάθετες μεταξύ τους και έχουν μήκος 1. Επειδή κάθε ορθογώνιος πίνακας είναι αντιστρέψιμος (ο αντίστροφός του συμπίπτει με τον ανάστροφό του που είναι επίσης ένας ορθογώνιος πίνακας) και οι στήλες του είναι ανά δύο κάθετα μοναδιαία διανύσματα, *οι στήλες κάθε ορθογώνιου πίνακα αποτελούν ορθοκανονική βάση του* $\mathbb{R}^n$.

Κάθε βάση ενός χώρου μπορεί να μετασχηματιστεί σε ορθοκανονική (δηλαδή σε μία άλλη βάση του ίδιου χώρου που αποτελείται από ανά δύο κάθετα μοναδιαία διανύσματα). Μία απλή διαδικασία γι' αυτό είναι η *διαδικασία ορθογωνοποίησης Gram-Schmidt*. Αν $\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$ είναι μία βάση του χώρου $\mathbb{V}$ τότε η διαδικασία κατασκευάζει ένα ένα τα ακόλουθα διανύσματα:

$$\begin{aligned}
&\underset{\sim}{u}_1 = \underset{\sim}{v}_1 && \underset{\sim}{w}_1 = \frac{\underset{\sim}{u}_1}{\|\underset{\sim}{u}_1\|} \\
&\underset{\sim}{u}_2 = \underset{\sim}{v}_2 - (\underset{\sim}{v}_2'\underset{\sim}{w}_1)\underset{\sim}{w}_1 && \underset{\sim}{w}_2 = \frac{\underset{\sim}{u}_2}{\|\underset{\sim}{u}_2\|} \\
&\underset{\sim}{u}_3 = \underset{\sim}{v}_3 - (\underset{\sim}{v}_3'\underset{\sim}{w}_1)\underset{\sim}{w}_1 - (\underset{\sim}{v}_3'\underset{\sim}{w}_2)\underset{\sim}{w}_2 && \underset{\sim}{w}_3 = \frac{\underset{\sim}{u}_3}{\|\underset{\sim}{u}_3\|} \\
&\quad\vdots && \quad\vdots \\
&\underset{\sim}{u}_m = \underset{\sim}{v}_m - (\underset{\sim}{v}_m'\underset{\sim}{w}_1)\underset{\sim}{w}_1 - \cdots - (\underset{\sim}{v}_m'\underset{\sim}{w}_{m-1})\underset{\sim}{w}_{m-1} && \underset{\sim}{w}_m = \frac{\underset{\sim}{u}_m}{\|\underset{\sim}{u}_m\|}
\end{aligned}$$

Τα διανύσματα $\underset{\sim}{w}_1, \ldots, \underset{\sim}{w}_m$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{V}$. Προφανώς είναι μοναδιαία διανύσματα μια και ισούνται με τα $\underset{\sim}{u}_i$ διαιρεμένα με το μήκος τους. Για το ότι είναι ανά δύο κάθετα διαπιστώστε το μόνοι σας δείχνοντας ότι το εσωτερικό τους γινόμενο ισούται με μηδέν. (Αν σας φαίνεται πολύ δύσκολο να το κάνετε γενικά, διαπιστώστε το μόνο στην περίπτωση που $m = 3$.) Για το ότι παράγουν και αυτά τον $\mathbb{V}$ θεωρήστε τον πίνακα με στήλες τα $\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2, \underset{\sim}{v}_3, \ldots, \underset{\sim}{v}_m$ και στη συνέχεια τους πίνακες

$$U_1 = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{u}_1 & \underset{\sim}{v}_2 & \underset{\sim}{v}_3 & \cdots & \underset{\sim}{v}_m \end{pmatrix},$$

$$W_1 = U_1 \begin{pmatrix} 1/\|\utilde{u}_1\| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \utilde{w}_1 & \utilde{v}_2 & \utilde{v}_3 & \cdots & \utilde{v}_m \end{pmatrix}$$

$$U_2 = W_1 \begin{pmatrix} 1 & -\utilde{v}_2'\utilde{w}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \utilde{w}_1 & \utilde{u}_2 & \utilde{v}_3 & \cdots & \utilde{v}_m \end{pmatrix},$$

$$W_2 = U_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\|\utilde{u}_2\| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \utilde{w}_1 & \utilde{w}_2 & \utilde{v}_3 & \cdots & \utilde{v}_m \end{pmatrix}$$

$$U_3 = W_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\utilde{v}_3'\utilde{w}_1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\utilde{v}_3'\utilde{w}_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \utilde{w}_1 & \utilde{w}_2 & \utilde{u}_3 & \cdots & \utilde{v}_m \end{pmatrix},$$

$$W_3 = U_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/\|\utilde{u}_3\| & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \utilde{w}_1 & \utilde{w}_2 & \utilde{w}_3 & \cdots & \utilde{v}_m \end{pmatrix}$$

και ούτω καθ' εξής μέχρι να φτάσουμε στον πίνακα $W_m = \begin{pmatrix} \utilde{w}_1 & \utilde{w}_2 \cdots & \utilde{w}_m \end{pmatrix}$. Παρατηρήστε ότι κάθε πίνακας προκύπτει από τον προηγούμενο πολλαπλασιάζοντάς τον από δεξιά με έναν αντιστρέψιμο πίνακα (είτε διαγώνιο είτε άνω τριγωνικό με ορίζουσα διάφορη του μηδενός). Επομένως, από το Αποτέλεσμα 11.3, οι στήλες των πινάκων $U_1, W_1, U_2, W_2, \ldots$ και τελικά οι στήλες $\utilde{w}_1, \ldots, \utilde{w}_m$ του W_m αποτελούν διαφορετικές βάσεις του $\mathbb{V}$.

Θεωρήστε τον χώρο $\mathbb{V}$ που παράγεται από τα διανύσματα $\utilde{v}_1 = (1,1,1)', \utilde{v}_2 = (1,2,3)'$. Τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (επιβεβαιώστε το), επομένως αποτελούν βάση του $\mathbb{V}$. Ας τη μετασχηματίσουμε σε ορθοκανονική μέσω της προηγούμενης διαδικασίας. (Εδώ η διαδικασία θα είναι πολύ γρήγορη μια και έχουμε μόνο δύο διανύσματα.) Θέτουμε πρώτα

$$\utilde{u}_1 = \utilde{v}_1 = (1,1,1)' \qquad \text{και} \qquad \utilde{w}_1 = \frac{\utilde{u}_1}{\|\utilde{u}_1\|} = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big)'$$

και μετά

$$\utilde{u}_2 = \utilde{v}_2 - (\utilde{v}_2'\utilde{w}_1)\utilde{w}_1 = (1,2,3)' - \frac{6}{\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big)' = (1,2,3)' - (2,2,2)' = (-1,0,1)'$$

και

$$\utilde{w}_2 = \frac{\utilde{u}_2}{\|\utilde{u}_2\|} = \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)'.$$

Τα διανύσματα $\utilde{w}_1 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})', \utilde{w}_2 = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})'$ είναι μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{V}$.

Είναι μάλλον προφανές αλλά πρέπει να τονιστεί: *Κάθε γνήσιος υπόχωρος* $\mathbb{U}$ *του* $\mathbb{V}$ (*δηλαδή* *υπόχωρος του $\mathbb{V}$ διαφορετικός από τον $\mathbb{V}$) έχει διάσταση μικρότερη του $\mathbb{V}$.* Πράγματι, όπως γνωρίζουμε δεν μπορούμε να βρούμε περισσότερα από $\dim(\mathbb{V})$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{V}$ και οποιαδήποτε $\dim(\mathbb{V})$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{V}$ είναι βάση του. Αφού ο $\mathbb{U}$ είναι υποσύνολο του $\mathbb{V}$ κάθε βάση του θα έχει το πολύ $\dim(\mathbb{V})$ διανύσματα. Ο $\mathbb{U}$ όμως έχει υποτεθεί γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{V}$, επομένως δεν μπορεί να παράγεται από $\dim(\mathbb{V})$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα (γιατί σε αυτήν την περίπτωση θα συνέπιπτε με τον $\mathbb{V}$). Άρα παράγεται από λίγότερα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα. Συνοψίζοντας:

$$\boxed{\text{Αν ο } \mathbb{U} \text{ είναι γνήσιος υπόχωρος του } \mathbb{V} \quad \text{τότε} \quad \dim(\mathbb{U}) < \dim(\mathbb{V}).}$$

Συμπεριλαμβάνοντας και την περίπτωση $\mathbb{U} = \mathbb{V}$, έχουμε ότι για κάθε υπόχωρο $\mathbb{U}$ του $\mathbb{V}$ ισχύει $\dim(\mathbb{U}) \leqslant \dim(\mathbb{V})$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνον αν $\mathbb{U} = \mathbb{V}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα το παραπάνω και την σχέση διάστασης και τάξης για να κάνουμε την απόδειξη που χρωστούσαμε για το Αποτέλεσμα 10.18. Θυμίζω πως ο ισχυρισμός έλεγε ότι για οποιουσδήποτε πίνακες $\underset{n\times m}{A}, \underset{n\times m}{B}$ ισχύει $\operatorname{rank}(A+B) \leqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.

Απόδειξη του Αποτελέσματος 10.18. Ας συμβολίσουμε με $\mathbb{V}_A, \mathbb{V}_B, \mathbb{V}_{A+B}$ τους χώρους που παράγονται από τις στήλες των $A, B, A+B$, αντίστοιχα. Θα δείξουμε το ισοδύναμο αποτέλεσμα $\dim(\mathbb{V}_{A+B}) \leqslant \dim(\mathbb{V}_A) + \dim(\mathbb{V}_B)$.

Έστω $\underset{n\times(2m)}{D} = (A \;\; B)$ ο πίνακας που έχει στήλες τις στήλες του A και τις στήλες του B. Τότε ισχύει $\operatorname{rank}(D) \leqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$ αφού οι γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες του D δεν μπορούν να είναι περισσότερες από τις γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες του A και του B· ισότητα θα έχουμε μόνο στην περίπτωση που οι γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες από τις γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες του B. Τα στοιχεία του χώρου $\mathbb{V}_D$, δηλαδή του χώρου που παράγεται από τις στήλες του D, έχουν την μορφή $D\utilde{c}$ όπου $\utilde{c} \in \mathbb{R}^{2m}$. Γράφοντας $\utilde{c} = \begin{pmatrix} \utilde{c}_1 \\ \utilde{c}_2 \end{pmatrix}$ με $\utilde{c}_1, \utilde{c}_2 \in \mathbb{R}^m$, βλέπουμε ότι τα στοιχεία του $\mathbb{V}_D$ έχουν τη μορφή $D\utilde{c} = (A \;\; B)\begin{pmatrix} \utilde{c}_1 \\ \utilde{c}_2 \end{pmatrix} = A\utilde{c}_1 + B\utilde{c}_2$. Εξ ορισμού, τα στοιχεία του $\mathbb{V}_{A+B}$ είναι οι γραμμικοί συνδυασμοί των στηλών του $A+B$, δηλαδή είναι τα διανύσματα της μορφής $(A+B)\utilde{d} = A\utilde{d} + B\utilde{d}$ με $\utilde{d} \in \mathbb{R}^m$. Επειδή $\mathbb{V}_{A+B} = \{A\utilde{c}_1 + B\utilde{c}_2 \text{ με } \utilde{c}_1 = \utilde{c}_2\}$, έχουμε $\mathbb{V}_{A+B} \subseteq \mathbb{V}_D$. Αυτό σημαίνει ότι $\dim(\mathbb{V}_{A+B}) \leqslant \dim(\mathbb{V}_D)$ επομένως,

$$\operatorname{rank}(A+B) = \dim(\mathbb{V}_{A+B}) \leqslant \dim(\mathbb{V}_D) = \operatorname{rank}(D) \leqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

□

Δικό σας: Τι πρέπει να συμβαίνει ώστε να ισχύει $\operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$;

12 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Όλα τα ακόλουθα αφορούν σε *τετραγωνικούς* πίνακες.

Ένας αριθμός λ καλείται **ιδιοτιμή** του πίνακα $\underset{n\times n}{A}$ αν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $\utilde{\epsilon}$ τέτοιο ώστε

$$A\utilde{\epsilon} = \lambda\utilde{\epsilon}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση το διάνυσμα $\underset{\sim}{\epsilon}$ λέμε ότι είναι ένα **ιδιοδιάνυσμα** που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Άλλοι όροι που μπορεί να συναντήσει κανείς για τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα είναι οι χαρακτηριστικές τιμές και χαρακτηριστικά διανύσματα.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι αν το $\underset{\sim}{\epsilon}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ τότε *το ίδιο ισχύει και για κάθε πολλαπλάσιό του*: Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης $A\underset{\sim}{\epsilon} = \lambda\underset{\sim}{\epsilon}$ με οποιοδήποτε $c \neq 0$ παίρνουμε $A(c\underset{\sim}{\epsilon}) = \lambda(c\underset{\sim}{\epsilon})$ που σημαίνει ότι και το $c\underset{\sim}{\epsilon}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Συνήθως επιλέγεται $c = 1/\|\underset{\sim}{\epsilon}\|$ έτσι ώστε το ιδιοδιάνυσμα να είναι κανονικοποιημένο (δηλαδή να έχει μήκος 1).

Παρατηρήστε ότι για οποιονδήποτε πίνακα $\underset{n\times n}{A}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
A\underset{\sim}{\epsilon} = \lambda\underset{\sim}{\epsilon} \ &\Leftrightarrow A\underset{\sim}{\epsilon} - \lambda\underset{\sim}{\epsilon} = \underset{\sim}{0} \\
&\Leftrightarrow A\underset{\sim}{\epsilon} - \lambda I_n\underset{\sim}{\epsilon} = \underset{\sim}{0} \qquad (\text{αφού } \underset{\sim}{\epsilon} = I_n\underset{\sim}{\epsilon}) \\
&\Leftrightarrow (A - \lambda I_n)\underset{\sim}{\epsilon} = \underset{\sim}{0} \qquad \begin{array}{l}(\text{βγάζω το } \underset{\sim}{\epsilon} \text{ από δεξιά ως κοινό παράγοντα·} \\ \ \text{ο λόγος που έθεσα πρώτα } \underset{\sim}{\epsilon} = I_n\underset{\sim}{\epsilon} \text{ είναι} \\ \ \text{ότι δεν θα είχε νόημα να γράψω } (A-\lambda)\underset{\sim}{\epsilon})\end{array}
\end{aligned}$$

Επομένως ο αριθμός λ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνον αν το ομογενές σύστημα $(A - \lambda I_n)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ έχει λύσεις εκτός της τετριμμένης (αφού εξ ορισμού τα ιδιοδιανύσματα είναι μη μηδενικά). Αυτό μπορεί να συμβαίνει αν και μόνον αν η ορίζουσα του $A - \lambda I_n$ ισούται με μηδέν. Επομένως,

$$\boxed{\text{οι ιδιοτιμές του πίνακα } A \text{ είναι οι λύσεις της εξίσωσης } |A - \lambda I_n| = 0.}$$

Ο πίνακας $A - \lambda I_n$ είναι ο πίνακας που προκύπτει όταν αφαιρέσουμε το λ από τα διαγώνια στοιχεία του A:

$$\underset{n\times n}{A} - \lambda I_n = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η ορίζουσα $|A-\lambda I_n|$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n, επομένως η εξίσωση $|A-\lambda I_n| = 0$ έχει ακριβώς n λύσεις κάποιες από τις οποίες μπορεί να επαναλαμβάνονται (δηλαδή να έχουν πολλαπλότητα μεγαλύτερη από 1) και κάποιες να μην είναι πραγματικοί αριθμοί αλλά *μιγαδικοί*. Επομένως:

Κάθε πίνακας διαστάσεων $n \times n$ έχει ακριβώς n ιδιοτιμές. Μερικές από αυτές (ή και όλες) μπορεί να είναι μιγαδικές αλλά και να επαναλαμβάνονται περισσότερες από μία φορές.

Μιγαδικοί αριθμοί

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών είναι ένα σύνολο πολύ μεγαλύτερο από αυτό των πραγματικών τους οποίους και περιλαμβάνει ως «ειδικές περιπτώσεις». Όλα ξεκινούν από την εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ που όπως ξέρουμε δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$. Εν τούτοις, ορίζοντας $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, η εξίσωση αυτή αποκτά δύο λύσεις: $x = -\mathrm{i}$ και $x = \mathrm{i}$ μια και εξ ορισμού $\mathrm{i}^2 = (-\mathrm{i})^2 = -1$. Το i, που στην ελληνική ορολογία το λέμε «γιοτ», καλείται *φανταστική μονάδα* και τα πολλαπλάσιά του καλούνται *φανταστικοί αριθμοί*. Μέσω των φανταστικών αριθμών ορίζεται και η τετραγωνική ρίζα κάθε αρνητικού πραγματικού αριθμού, π.χ. $\sqrt{-9} = 3\mathrm{i}$, αφού $(3\mathrm{i})^2 = (3\mathrm{i})(3\mathrm{i}) = 9\mathrm{i}^2 = 9(-1) = -9$. Οι *μιγαδικοί αριθμοί* προκύπτουν προσθέτοντας έναν πραγματικό και έναν φανταστικό αριθμό. Το σύνολο $\mathbb{C} = \{z = a + b\mathrm{i}\,;\, a, b \in \mathbb{R}\}$ καλείται *σύνολο μιγαδικών αριθμών*. Αν $z = a + b\mathrm{i}$ ένας μιγαδικός αριθμός τότε το a καλείται πραγματικό μέρος του και το b φανταστικό μέρος του. Οι πραγματικοί αριθμοί είναι ειδικές περιπτώσεις μιγαδικών που έχουν φανταστικό μέρος 0. Μέσω των μιγαδικών αριθμών μπορούμε να λύσουμε εξισώσεις που «κανονικά» δεν θα είχαν λύση. Π.χ., από το σχολείο ξέρουμε ότι όταν ένα τριώνυμο έχει αρνητική διακρίνουσα τότε δεν έχει ρίζες. Το σωστό είναι ότι δεν έχει πραγματικές ρίζες γιατί έχει μιγαδικές. Για παράδειγμα, το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει διακρίνουσα $1^2 - 4(1)(1) = -3$ επομένως δεν έχει πραγματικές ρίζες. Έχει όμως μιγαδικές, τις $(-1 \pm \sqrt{-3})/2 = (-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3})/2$. (Θυμάστε, υποθέτω, τον τύπο των ριζών του τριωνύμου $\dfrac{-\beta \pm \sqrt{\varDelta}}{2\alpha}$ όπου $\varDelta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ είναι η διακρίνουσα.)

Ρίζες πολυωνύμων

Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας λέει ότι κάθε πολυώνυμο βαθμού n, δηλαδή κάθε συνάρτηση της μορφής

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

με μιγαδικούς συντελεστές $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ (στους οποίους συμπεριλαμβάνονται και οι πραγματικοί συντελεστές ως ειδικές περιπτώσεις) έχει ακριβώς n (γενικά μιγαδικές) ρίζες, δηλαδή τιμές x που το μηδενίζουν. Κάποιες από τις ρίζες ενδέχεται να επαναλαμβάνονται. Το πλήθος επαναλήψεων μίας ρίζας καλείται *πολλαπλότητα* αυτής της ρίζας. Η πολλαπλότητα κάθε ρίζας σχετίζεται με το πόσες παραγώγους του πολυωνύμου μηδενίζει: Μία ρίζα έχει πολλαπλότητα ένα αν μηδενίζει το πολυώνυμο αλλά όχι την παράγωγό του. Μία ρίζα έχει πολλαπλότητα δύο αν μηδενίζει το πολυώνυμο, την πρώτη παράγωγό του αλλά όχι την δεύτερη. Μία ρίζα έχει πολλαπλότητα k αν μηδενίζει το πολυώνυμο, τις $k - 1$ πρώτες παραγώγους του αλλά όχι την k-οστή. Κάθε πολυώνυμο μπορεί να εκφρασθεί και μέσω των ριζών του: Ισχύει

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - \rho_1)\cdots(x - \rho_n)$$

όπου $\rho_1, \ldots, \rho_n$ οι ρίζες του. Για παράδειγμα, το πολυώνυμο $2x^3 - 2x^2 - 16x + 24$ που έχει ρίζες -3 και 2 (με το 2 είναι να «διπλή», δηλαδή να έχει πολλαπλότητα δύο) ισούται με $2(x+3)(x-2)(x-2) = 2(x+3)(x-2)^2$ (κάντε τις πράξεις για να γυρίσετε ξανά στο πολυώνυμο), το πολυώνυμο $x^2 + x + 1$ που είδαμε προηγουμένως ισούται με $\bigl(x - \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\bigr)\bigl(x - \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\bigr)$ κλπ. Κάνοντας πράξεις μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι

$$a_n(x - \rho_1)\cdots(x - \rho_n) = a_n x^n - a_n(\rho_1 + \cdots + \rho_n)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n \rho_1 \cdots \rho_n.$$

(Υπάρχει λόγος για τον οποίον μας ενδιαφέρουν ο όρος βαθμού $n - 1$ και ο σταθερός. Θα δούμε σε λίγο γιατί.) Για παράδειγμα, στο πολυώνυμο τρίτου βαθμού $2x^3 - 2x^2 - 16x + 24$ που έχει συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου το 2 και ρίζες $-3, 2, 2$, ο συντελεστής του $x^{3-1} = x^2$ είναι $-2(-3+2+2) = -2$ και ο σταθερός όρος είναι $(-1)^3 2(-3)(2)(2) = 24$ ενώ στο πολυώνυμο δευτέρου βαθμού $x^2 + x + 1$, ο συντελεστής του $x^{2-1} = x$ είναι $-1\bigl(\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\bigr) = 1$ ενώ ο σταθερός όρος είναι $(-1)^2 1\bigl(\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\bigr)\bigl(\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\bigr) = 1$. Γενικά, τον σταθερό όρο ενός πολυωνύμου ως προς x μπορούμε να τον βρούμε θέτοντας $x = 0$.

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα $|A-\lambda I_n|$ μπορούμε να δούμε ότι ισούται με

$$(-1)^n\lambda^n-(-1)^n\mathrm{tr}(A)\lambda^{n-1}+\cdots+|A|$$

Αφού οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες αυτού του πολυωνύμου, συγκρίνοντας την παραπάνω με το τελευταίο ανάπτυγμα της προηγούμενης σελίδας συμπεραίνουμε ότι

- το άθροισμα των ιδιοτιμών του πίνακα A ισούται με το ίχνος του $\mathrm{tr}(A)$ και
- το γινόμενο των ιδιοτιμών του πίνακα A ισούται με την ορίζουσά του $|A|$

Τις ιδιοτιμές του $\underset{n\times n}{A}$ θα τις συμβολίζουμε γενικά με $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα με $\underset{\sim}{e}_1,\ldots,\underset{\sim}{e}_n$.

Ας δούμε ένα παράδειγμα. Θα βρούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$\underset{2\times 2}{A}=\begin{pmatrix}1&-2\\-3&2\end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$|A-\lambda I_2|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2\\-3&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)-6=\lambda^2-3\lambda-4.$$

Το τριώνυμο έχει δύο διακεκριμένες ρίζες, τις $\lambda_1=4$, $\lambda_2=-1$. Αυτές είναι οι δύο ιδιοτιμές του πίνακα A. Για να βρούμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τις παίρνουμε μία μία και λύνουμε τα ομογενή συστήματα $(A-\lambda_1 I_2)\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{0}$, $(A-\lambda_2 I_2)\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{0}$. Για την $\lambda_1=4$ έχουμε το σύστημα

$$(A-4I_2)\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1-4&-2\\-3&2-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-3&-2\\-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

που έχει λύσεις $c(-2/3,1)'$, $c\in\mathbb{R}$. Όλα αυτά (εκτός από το $\underset{\sim}{0}$ που αντιστοιχεί στο $c=0$) είναι ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 4, Θέτοντας για ευκολία $c=3$ παίρνουμε $\underset{\sim}{e}_1=(-2,3)'$. Αυτός είναι ένας «αντιπρόσωπος» των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 4. Θα μπορούσαμε αντί αυτού να πάρουμε ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα θέτοντας $c=1/\|\underset{\sim}{e}_1\|=1/\sqrt{(-2/3)^2+1^2}=3/\sqrt{13}$. Το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $(-2/\sqrt{13},3/\sqrt{13})'$. Για την ιδιοτιμή $\lambda_2=-1$ έχουμε

$$\{A-(-1)I_2\}\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1-(-1)&-2\\-3&2-(-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&-2\\-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

που έχει λύσεις $c(1,1)'$, $c\in\mathbb{R}$. Όλα αυτά (εκτός από το $\underset{\sim}{0}$ που αντιστοιχεί στο $c=0$) είναι ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή -1, Θέτοντας για ευκολία $c=1$ παίρνουμε $\underset{\sim}{e}_2=(1,1)'$ ενώ θέτοντας $c=1/\|\underset{\sim}{e}_2\|=1/\sqrt{2}$ παίρνουμε το μοναδιαίο ιδιοδιάυνυσμα $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})'$. Επομένως, οι ιδιοτιμές του A είναι οι $4,-1$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα $(-2,3)',(1,1)'$ (ή και οποιαδήποτε πολλαπλάσιά τους). Παρατηρήστε ότι

$$\mathrm{tr}(A)=1+2=3\qquad\text{και}\qquad\lambda_1+\lambda_2=4+(-1)=3$$

και

$$|A|=(1)(2)-(-2)(-3)=-4\qquad\text{και}\qquad\lambda_1\lambda_2=(4)(-1)=-4.$$

Ας δούμε κι ένα δεύτερο παράδειγμα. Έστω

$$\underset{3\times 3}{B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$|B - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -3 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$(2-\lambda)\{(2-\lambda)(-1-\lambda)-1\} + 3\{(-1-\lambda)+3\} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

άρα ο B έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές τις $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ και $\lambda_3 = 0$. Διαπιστώστε μόνοι σας ότι $\mathrm{tr}(B) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i$ και $|B| = \prod_{i=1}^3 \lambda_i$. Για να βρούμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα λύνουμε τα ομογενή συστήματα $(B - \lambda_i I_3)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ για $i = 1, 2, 3$. Για την $\lambda_1 = 2$ έχουμε

$$(B - 2I_3)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-2 & -3 & 0 \\ 1 & 2-2 & 1 \\ -3 & 1 & -1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα έχει λύσεις της μορφής $c(-1, 0, 1)', c \in \mathbb{R}$. Όλα αυτά (εκτός από το $\underset{\sim}{0}$ που αντιστοιχεί στο $c = 0$) είναι ιδιοδιανύσματα του B που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$. Θέτοντας για ευκολία $c = 1$ παίρνουμε το ιδιοδιάνυσμα $\underset{\sim}{\epsilon}_1 = (-1, 0, 1)'$. Για την $\lambda_2 = 1$ έχουμε

$$(B - 1I_3)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-1 & -3 & 0 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ -3 & 1 & -1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα έχει λύσεις της μορφής $c(-3/4, -1/4, 1)', c \in \mathbb{R}$. Όλα αυτά (εκτός από το $\underset{\sim}{0}$ που αντιστοιχεί στο $c = 0$) είναι ιδιοδιανύσματα του B που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$. Θέτοντας για ευκολία $c = 4$ παίρνουμε το ιδιοδιάνυσμα $\underset{\sim}{\epsilon}_2 = (-3, -1, 4)'$. Για την $\lambda_3 = 0$ έχουμε

$$(B - 0I_3)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-0 & -3 & 0 \\ 1 & 2-0 & 1 \\ -3 & 1 & -1-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα έχει λύσεις της μορφής $c(-3/7, -2/7, 1)', c \in \mathbb{R}$. Όλα αυτά (εκτός από το $\underset{\sim}{0}$ που αντιστοιχεί στο $c = 0$) είναι ιδιοδιανύσματα του B που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_3 = 0$. Θέτοντας για ευκολία $c = 7$ παίρνουμε το ιδιοδιάνυσμα $\underset{\sim}{\epsilon}_3 = (-3, -2, 1)'$.

Ερωτήσεις για εσάς: Ποια είναι τα μοναδιαία ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις τρεις ιδιοτιμές του B; Ισχύει $\mathrm{tr}(B) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i$; Ισχύει $|B| = \prod_{i=1}^3 \lambda_i$;

Γενικά, από την σχέση ιδιοτιμών–ιδιοδιανυσμάτων ενός πίνακα $\underset{n\times n}{A}$ έχουμε

$$A\underset{\sim}{\epsilon}_1 = \lambda_1\underset{\sim}{\epsilon}_1, \;\; A\underset{\sim}{\epsilon}_2 = \lambda_2\underset{\sim}{\epsilon}_2, \;\; \ldots, \;\; A\underset{\sim}{\epsilon}_n = \lambda_n\underset{\sim}{\epsilon}_n$$

ή, ισοδύναμα,

$$(A\underset{\sim}{\epsilon}_1 \; A\underset{\sim}{\epsilon}_2 \; \cdots \; A\underset{\sim}{\epsilon}_n) = (\lambda_1\underset{\sim}{\epsilon}_1 \; \lambda_2\underset{\sim}{\epsilon}_2 \; \cdots \; \lambda_n\underset{\sim}{\epsilon}_n) \Leftrightarrow A(\underset{\sim}{\epsilon}_1 \; \underset{\sim}{\epsilon}_2 \; \cdots \; \underset{\sim}{\epsilon}_n) = (\underset{\sim}{\epsilon}_1 \; \underset{\sim}{\epsilon}_2 \; \cdots \; \underset{\sim}{\epsilon}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{\Large 0} \\ & \lambda_2 & \\ \text{\Large 0} & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(θυμηθείτε ότι όταν πολλαπλασιάζεται ένας πίνακας από δεξιά με έναν διαγώνιο, οι στήλες του πολλαπλασιάζονται με τα αντίστοιχα διαγώνια στοιχεία). Επομένως, αν $\underset{n\times n}{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ είναι ο διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του A και $\underset{n\times n}{E} = (\underset{\sim}{\epsilon}_1 \ \cdots \ \underset{\sim}{\epsilon}_n)$ είναι ο πίνακας που έχει στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A, οι εξισώσεις που ορίζουν τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα συνοψίζονται στην εξίσωση

$$AE = E\Lambda.$$

Σε περίπτωση που ο E είναι αντιστρέψιμος (αν δηλαδή τα n ιδιοδιανύσματα του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητα) αυτή η σχέση είναι ισοδύναμη με τις

$$A = E\Lambda E^{-1} \qquad \text{και} \qquad E^{-1}AE = \Lambda.$$

Αν ισχύει το παραπάνω τότε λέμε ότι ο A είναι **διαγωνοποιήσιμος**.

Για παράδειγμα, είδαμε προηγουμένως ότι ο $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 4$ και $\lambda_2 = -1$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\underset{\sim}{\epsilon}_1 = (-2, 3)'$ και $\underset{\sim}{\epsilon}_2 = (1, 1)'$. Ο πίνακας $E = (\underset{\sim}{\epsilon}_1 \ \underset{\sim}{\epsilon}_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος (ισοδύναμα, τα δύο ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα) αφού $|E| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Ο αντίστροφος του E είναι ο $E^{-1} = \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$ και ισχύει

$$E\Lambda E^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = A$$

όπως προβλέπεται.

Μερικές γενικές παρατηρήσεις είναι οι ακόλουθες:

Το μηδέν είναι ιδιοτιμή ενός πίνακα $\underset{n\times n}{A}$ αν $|A - 0I_n| = |A| = 0$, δηλαδή αν και μόνο αν η ορίζουσά του είναι μηδέν. Άρα *ένας πίνακας έχει το 0 ως ιδιοτιμή αν και μόνον αν δεν είναι αντιστρέψιμος.*

Κάθε πίνακας έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον ανάστροφό του αφού κάθε πίνακας έχει την ίδια ορίζουσα με τον ανάστροφό του, οπότε $|A - \lambda I_n| = |(A - \lambda I_n)'| = |A' - \lambda I_n|$. (Τα ιδιοδιανύσματα όμως του αναστρόφου ενός πίνακα, γενικά, διαφέρουν από αυτά του πίνακα.)

Οι ιδιοτιμές ενός διαγώνιου πίνακα είναι τα διαγώνια στοιχεία του και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι οι στήλες του μοναδιαίου πίνακα. Πράγματι, αν $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ τότε $|D - \lambda I_n| = (d_1 - \lambda_1) \cdots (d_n - \lambda_n)$, άρα $\Lambda = D$, και η σχέση $AE = E\Lambda$ που είδαμε πιο πάνω γίνεται $DI_n = I_n D$.

Οι ιδιοτιμές ενός τριγωνικού (είτε άνω είτε κάτω) πίνακα είναι τα διαγώνια στοιχεία του αφού η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα είναι το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του (αλλά τα ιδιοδιανύσματά του δεν είναι, γενικά, οι στήλες του μοναδιαίου πίνακα).

Ένας πίνακας διαστάσεων 1×1 έχει μία μόνο «ιδιοτιμή» που συμπίπτει με το μοναδικό στοιχείο του ενώ «ιδιοδιανύσματά» του είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Πράγματι, αν $\underset{1\times 1}{A} = (a)$ τότε η «ορίζουσα» $|A - \lambda I_1|$ είναι η διαφορά $a - \lambda$ που μηδενίζεται για $\lambda = a$ ενώ το «ομογενές σύστημα» $(A - aI_1)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ είναι ουσιαστικά η εξίσωση $0x = 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν ο $\underset{n\times n}{A}$ είναι αντιστρέψιμος τότε *ο αντίστροφός του έχει τα ίδια ιδιοδιανύσματα και αντίστροφες ιδιοτιμές*. Πράγματι, αν το λ είναι ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\underset{\sim}{\epsilon}$ τότε έχουμε

$$A\underset{\sim}{\epsilon} = \lambda\underset{\sim}{\epsilon} \Leftrightarrow A^{-1}(A\underset{\sim}{\epsilon}) = A^{-1}(\lambda\underset{\sim}{\epsilon}) \Leftrightarrow (A^{-1}A)\underset{\sim}{\epsilon} = \lambda(A^{-1}\underset{\sim}{\epsilon}) \Leftrightarrow (1/\lambda)\underset{\sim}{\epsilon} = A^{-1}\underset{\sim}{\epsilon}$$

Η τελευταία ισότητα μας λέει ότι το $1/\lambda$ είναι ιδιοτιμή του A^{-1} με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\underset{\sim}{\epsilon}$. (Εδώ το $1/\lambda$ έχει νόημα γιατί αφού ο A είναι αντιστρέψιμος ισχύει $\lambda \neq 0$.) Το αποτέλεσμα θα μπορούσαμε να το πάρουμε και συνολικά για όλες τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A από την σχέση $AE = E\Lambda$: Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με τον A^{-1} και από δεξιά με τον $\Lambda^{-1} = \mathrm{diag}(1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_n)$ παίρνουμε

$$AE = E\Lambda \Leftrightarrow A^{-1}AE\Lambda^{-1} = A^{-1}E\Lambda\Lambda^{-1} \Leftrightarrow E\Lambda^{-1} = A^{-1}E$$

Η k-οστή δύναμη του A, δηλαδή ο πίνακας A^k, έχει τα ίδια ιδιοδιανύσματα με τον A και ιδιοτιμές τις k δυνάμεις των ιδιοτιμών του A. Πράγματι, αν λ είναι ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\underset{\sim}{\epsilon}$ τότε για $k = 2$ έχουμε

$$A^2\underset{\sim}{\epsilon} = A(A\underset{\sim}{\epsilon}) = A(\lambda\underset{\sim}{\epsilon}) = \lambda(A\underset{\sim}{\epsilon}) = \lambda(\lambda\underset{\sim}{\epsilon}) = \lambda^2\underset{\sim}{\epsilon}, \quad \text{δηλαδή } A^2\underset{\sim}{\epsilon} = \lambda^2\underset{\sim}{\epsilon}$$

ή και, όπως προηγουμένως, συνολικά για όλες τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A παρατηρώντας ότι

$$AE = E\Lambda \Leftrightarrow AAE = AE\Lambda \Leftrightarrow A^2E = E\Lambda\Lambda \Leftrightarrow A^2E = E\Lambda^2$$

(είναι $\Lambda^2 = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)$). Για $k = 3$ έχουμε

$$A^3\underset{\sim}{\epsilon} = A(A^2\underset{\sim}{\epsilon}) = A(\lambda^2\underset{\sim}{\epsilon}) = \lambda^2(A\underset{\sim}{\epsilon}) = \lambda^2(\lambda\underset{\sim}{\epsilon}) = \lambda^3\underset{\sim}{\epsilon}, \quad \text{δηλαδή } A^3\underset{\sim}{\epsilon} = \lambda^3\underset{\sim}{\epsilon}$$

Συνεχίζοντας έτσι μπορούμε να δείξουμε ότι για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο k ισχύει

$$A^k\underset{\sim}{\epsilon} = \lambda^k\underset{\sim}{\epsilon}$$

Η προηγούμενη παρατήρηση συνεπάγεται ότι αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος ώστε να μπορεί να γραφεί ως $A = E\Lambda E^{-1}$ τότε για κάθε θετικό ακέραιο k ισχύει $A^k = E\Lambda^k E^{-1}$, μια και $\Lambda^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$.

Η αναπαράσταση $A^k = E\Lambda^k E^{-1}$ είναι πολύ βολική, ειδικά όταν το k είναι μεγάλο. Για παράδειγμα θεωρήστε πάλι τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ που είδαμε προηγουμένως ότι έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\underset{\sim}{\epsilon}_1 = (-2, 3)'$, $\underset{\sim}{\epsilon}_2 = (1, 1)'$. Τότε, θέτοντας $\Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ με $E^{-1} = \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
A^2 = E\Lambda^2E^{-1} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}, \\
A^3 = E\Lambda^3E^{-1} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^3\begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -26 \\ -39 & 38 \end{pmatrix}$$

$$A^8 = E\Lambda^8 E^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^8 \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 65536 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26215 & -26214 \\ -39321 & 39322 \end{pmatrix}$$

και ούτω καθ' εξής. (Φανταστείτε να έπρεπε να υπολογίσετε τον A^8 και να τον υπολογίζατε πολλαπλασιάζοντας $A \cdots A$ οκτώ φορές.)

Εφαρμόζοντας την προηγούμενη παρατήρηση στον πίνακα A^{-1} παίρνουμε ότι η k δύναμη του A^{-1} (που μπορούμε να συμφωνήσουμε ότι θα την γράφουμε A^{-k} και θα εννοούμε $(A^{-1})^k$) έχει τα ίδια ιδιοδιανύσματα με τον A και ιδιοτιμές $1/\lambda_1^k, \ldots, 1/\lambda_n^k$. Εφ' όσον ο A είναι διαγωνοποιήσιμος θα έχουμε $A^{-k} = E\Lambda^{-k}E^{-1}$. Για παράδειγμα, για τον A του προηγούμενου παραδείγματος έχουμε

$$A^{-1} = E\Lambda^{-1}E^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -3/4 & -1/4 \end{pmatrix},$$

$$A^{-4} = E\Lambda^{-4}E^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-4} \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/256 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77/128 & 51/128 \\ 153/256 & 103/256 \end{pmatrix}$$

Όπως οι δυνάμεις του A έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα με τον A και ιδιοτιμές τις αντίστοιχες δυνάμεις των ιδιοτιμών του A έτσι και αρκετές άλλες συναρτήσεις του A έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα με τον A και ιδιοτιμές τις «αντίστοιχες» συναρτήσεις των ιδιοτιμών του. Για παράδειγμα, αν ο πίνακας $I_n + A$ είναι αντιστρέψιμος (που ισχύει αν και μόνον αν ο A δεν έχει ιδιοτιμή το -1· γιατί;) τότε ο πίνακας $A(I_n + A)^{-1}$ έχει τα ίδια ιδιοδιανύσματα με τον A και ιδιοτιμές $\lambda_1(1+\lambda_1)^{-1}, \ldots, \lambda_n(1+\lambda_n)^{-1}$. Πράγματι, αν το λ είναι ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\underset{\sim}{\epsilon}$ έχουμε

$$A\underset{\sim}{\epsilon} = \lambda\underset{\sim}{\epsilon} \Leftrightarrow \underset{\sim}{\epsilon} + A\underset{\sim}{\epsilon} = \underset{\sim}{\epsilon} + \lambda\underset{\sim}{\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow (I_n + A)\underset{\sim}{\epsilon} = (1+\lambda)\underset{\sim}{\epsilon}$$

(βγάζοντας κοινό παράγοντα το $\underset{\sim}{\epsilon}$· παρεμπιπτόντως, το παραπάνω σημαίνει ότι ο $I_n + A$ έχει τα ίδια ιδιοδιανύσματα με τον A και ιδιοτιμές $1+\lambda_1, \ldots, 1+\lambda_n$)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\lambda}\underset{\sim}{\epsilon} = (I_n + A)^{-1}\underset{\sim}{\epsilon}$$

(διαιρώντας με $1+\lambda$ και πολ/σιάζοντας από αριστερά με $(I_n + A)^{-1}$· αυτό λέει ότι ο $(I_n + A)^{-1}$ έχει τα ίδια ιδιοδιανύσματα με τον A και ιδιοτιμές $\frac{1}{1+\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{1+\lambda_n}$)

$$\Rightarrow A\frac{1}{1+\lambda}\underset{\sim}{\epsilon} = A(I_n + A)^{-1}\underset{\sim}{\epsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{1+\lambda}A\underset{\sim}{\epsilon} = A(I_n + A)^{-1}\underset{\sim}{\epsilon} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{1+\lambda}\underset{\sim}{\epsilon} = A(I_n + A)^{-1}\underset{\sim}{\epsilon}$$

και έτσι επιβεβαιώνεται ο ισχυρισμός.

Δικό σας: Αν ο $I_n - A$ είναι αντιστρέψιμος (πότε ισχύει αυτό;) τότε ο $A^3(I_n - A)^{-4}$ έχει τα ίδια ιδιοδιανύσματα με τον A και ιδιοτιμές $\dfrac{\lambda_1^3}{(1-\lambda_1)^4}, \ldots, \dfrac{\lambda_n^3}{(1-\lambda_n)^4}$.

Όπως είπαμε, ένας πίνακας διαγωνοποιείται αν έχει γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Η γραμμική ανεξαρτησία των ιδιοδιανυσμάτων δεν εξασφαλίζεται πάντα. Ας δούμε μερικές περιπτώσεις που συμβαίνει αυτό.

Αποτέλεσμα 12.1. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απόδειξη. Έστω $\lambda_1 \neq \lambda_2$ δύο ιδιοτιμές του A και $\underset{\sim}{\epsilon}_1, \underset{\sim}{\epsilon}_2$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Αυτό σημαίνει ότι $A\underset{\sim}{\epsilon}_1 = \lambda_1\underset{\sim}{\epsilon}_1$ και $A\underset{\sim}{\epsilon}_2 = \lambda_2\underset{\sim}{\epsilon}_2$. Θα δείξουμε ότι αν $c_1\underset{\sim}{\epsilon}_1 + c_2\underset{\sim}{\epsilon}_2 = \underset{\sim}{0}$ τότε $c_1 = c_2 = 0$.

Αν $c_2 = 0$ τότε και $c_1 = 0$ αφού το $\underset{\sim}{\epsilon}_1$ είναι εξ ορισμού μη μηδενικό. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $c_2 \neq 0$. Τότε $c_1\underset{\sim}{\epsilon}_1 + c_2\underset{\sim}{\epsilon}_2 = \underset{\sim}{0} \Leftrightarrow \underset{\sim}{\epsilon}_2 = -\dfrac{c_1}{c_2}\underset{\sim}{\epsilon}_1$ οπότε

$$A\underset{\sim}{\epsilon}_2 = \lambda_2\underset{\sim}{\epsilon}_2 \Leftrightarrow -\frac{c_1}{c_2}A\underset{\sim}{\epsilon}_1 = -\frac{c_1}{c_2}\lambda_2\underset{\sim}{\epsilon}_1 \Leftrightarrow A\underset{\sim}{\epsilon}_1 = \lambda_2\underset{\sim}{\epsilon}_1.$$

Αλλά $A\underset{\sim}{\epsilon}_1 = \lambda_1\underset{\sim}{\epsilon}_1$, οπότε η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την $\lambda_1\underset{\sim}{\epsilon}_1 = \lambda_2\underset{\sim}{\epsilon}_1 \Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\underset{\sim}{\epsilon}_1 = \underset{\sim}{0}$ που συνεπάγεται $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ αφού το $\underset{\sim}{\epsilon}_1$ είναι μη μηδενικό. Όμως αυτό δεν ισχύει γιατί οι ιδιοτιμές έχουν υποτεθεί διαφορετικές μεταξύ τους. Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι $c_2 \neq 0$. Επομένως $c_2 = 0$ και $c_1 = 0$. □

Το Αποτέλεσμα 12.1 γενικεύεται και για περισσότερα από δύο ιδιοδιανύσματα:

Αποτέλεσμα 12.2. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε m διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απόδειξη. Θα μπορούσαμε να το δείξουμε επαγωγικά, δηλαδή να το δείξουμε για $m = 3$ ιδιοδιανύσματα χρησιμοποιώντας το Αποτέλεσμα 12.1 που είναι για $m = 2$, μετά για $m = 4$ χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα για $m = 3$ κ.ο.κ. Εν τούτοις θα προτιμήσω να αποδείξω τον ισχυρισμό συνολικά.

Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ m διακεκριμένες ιδιοτιμές του $\underset{n\times n}{A}$ και $\underset{\sim}{\epsilon}_1, \ldots, \underset{\sim}{\epsilon}_m$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Θα υποθέσουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι μόνο k από αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, με $k < m$, ενώ τα υπόλοιπα $m - k$ γράφονται ως γραμμικοί συνδυασμοί τους. Έστω $\underset{n\times k}{E_1}$ ο πίνακας με στήλες τα k γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, $\underset{n\times(m-k)}{E_2}$ ο πίνακας με στήλες τα υπόλοιπα $m - k$ και $\underset{k\times k}{\Lambda_1}$, $\underset{(m-k)\times(m-k)}{\Lambda_2}$ οι διαγώνιοι πίνακες με τις αντίστοιχες ιδιοτιμές. Αφού $A\underset{\sim}{\epsilon}_i = \lambda_i\underset{\sim}{\epsilon}_i$, $i = 1, \ldots, m$, για τους παραπάνω πίνακες ισχύει $AE_1 = E_1\Lambda_1$ και $AE_2 = E_2\Lambda_2$. Επίσης, αφού οι στήλες του E_2 είναι γραμμικοί συνδυασμοί των στηλών του E_1 θα υπάρχει πίνακας $\underset{k\times(m-k)}{C} = (c_{ij})$ έτσι ώστε $E_2 = E_1C$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
AE_2 = E_2\Lambda_2 &\Leftrightarrow AE_1C = E_1C\Lambda_2 \quad (\text{αφού } E_2 = E_1C)\\
&\Leftrightarrow E_1\Lambda_1C = E_1C\Lambda_2 \quad (\text{αφού } AE_1 = E_1\Lambda_1)\\
&\Leftrightarrow E_1\Lambda_1C - E_1C\Lambda_2 = \mathrm{O}\\
&\Leftrightarrow E_1(\Lambda_1C - C\Lambda_2) = \mathrm{O}
\end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση μας λέει ότι το γινόμενο του E_1 με κάθε μία από τις στήλες του $\Lambda_1C - C\Lambda_2$ ισούται με $\underset{\sim}{0}$. Όμως ο E_1 έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες επομένως το ομογενές σύστημα $E_1\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση. Αυτό συνεπάγεται ότι όλες οι στήλες του $\Lambda_1C - C\Lambda_2$ είναι $\underset{\sim}{0}$, δηλαδή $\Lambda_1C - C\Lambda_2 = \mathrm{O}$. Θυμηθείτε τώρα ότι όταν πολλαπλασιάζουμε έναν πίνακα με έναν διαγώνιο πίνακα από αριστερά τότε πολλαπλασιάζονται οι γραμμές του με τα αντίστοιχα διαγώνια στοιχεία ενώ όταν τον πολλαπλασιάζουμε με έναν διαγώνιο από δεξιά πολλαπλασιάζονται οι στήλες του με τα αντίστοιχα διαγώνια στοιχεία. Επομένως το στοιχείο ij του $\Lambda_1 C$ είναι $\mu_i c_{ij}$, όπου μ_i η ιδιοτιμή που βρίσκεται στην γραμμή i του Λ_1 ενώ το στοιχείο ij του $C\Lambda_2$ είναι $\nu_j c_{ij}$ όπου ν_j η ιδιοτιμή που βρίσκεται στην γραμμή j του Λ_2. (Ονόμασα μ τις ιδιοτιμές που περιέχει ο Λ_1 και ν τις ιδιοτιμές που περιέχει ο Λ_2 για απλότητα στους συμβολισμούς. Οι k ιδοτιμές μ και οι $m-k$ ιδιοτιμές ν είναι οι $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.) Επειδή ο C δεν μπορεί να είναι μηδενικός πίνακας (γιατί αν ήταν θα είχαμε $E_2 = E_1 C = \mathrm{O}$ που δεν μπορεί να συμβαίνει μια και τα ιδιοδιανύσματα είναι εξ ορισμού μη μηδενικά) θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $c_{ij} \neq 0$. Όμως τότε θα έχουμε $\mu_i c_{ij} - \nu_j c_{ij} = 0 \Leftrightarrow (\mu_i - \nu_j) c_{ij} = 0 \Leftrightarrow \mu_i = \nu_j$. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβαίνει γιατί οι ιδιοτιμές που περιέχει ο Λ_1 είναι διαφορετικές από αυτές που περιέχει ο Λ_2. Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι τα γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα είναι λιγότερα από m. Επομένως τα $\underset{\sim}{e}_1, \ldots, \underset{\sim}{e}_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. $\square$

Εφαρμόζοντας το Αποτέλεσμα 12.2 με $m = n$ παίρνουμε το ακόλουθο:

Αποτέλεσμα 12.3. Αν ο πίνακας $\underset{n\times n}{A}$ έχει n διαφορετικές ιδιοτιμές τότε είναι διαγωνοποιήσιμος.

Αν μία ιδιοτιμή έχει πολλαπλότητα $k > 1$ τότε δεν εξασφαλίζεται πάντα ότι σε αυτήν αντιστοιχούν k γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. (Περισσότερες λεπτομέρειες για αυτό θα δείτε όσοι πάρετε το μάθημα επιλογής του επόμενου εξαμήνου.) Εδώ θα κάνουμε ένα παράδειγμα όπου μία ιδιοτιμή έχει πολλαπλότητα δύο και αντιστοιχούν σε αυτήν δύο γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Έστω $\underset{3\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Τότε $|A - \lambda I_3| = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 8 = -(\lambda-2)(\lambda+2)^2$, άρα οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$. Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ είναι λύση του συστήματος

$$(A - 2I_3)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-2 & 1 & -2 \\ 5 & -1-2 & -2 \\ 5 & 1 & -4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Εφαρμόζοντας απαλοιφή Gauss στον πίνακα των συντελεστών καταλήγουμε στη μορφή echelon $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ που δίνει την λύση $c(1,1,1)'$, $c \in \mathbb{R}$. Παίρνοντας για ευκολία $c = 1$ έχουμε $\underset{\sim}{e}_1 = (1,1,1)'$. Για να βρούμε ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή -2 λύνουμε το σύστημα

$$(A - (-2)I_3)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Εδώ ουσιαστικά έχουμε μόνο μία εξίσωση, την $5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -5x_1 + 2x_3$ οπότε οι λύσεις του συστήματος έχουν τη μορφή $(x_1, -5x_1 + 2x_3, x_3)'$, $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$. Κάθε ένα από αυτά, εκτός από το $\underset{\sim}{0}$, είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -2. Κοιτάξτε πώς θα βρούμε δύο γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Επειδή για την γενική λύση του συστήματος ισχύει

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ -5x_1 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ο χώρος των λύσεων του συστήματος (θυμηθείτε ότι έχουμε δείξει πως το σύνολο των λύσεων ενός ομογενούς συστήματος είναι διανυσματικός χώρος) παράγεται από τα διανύσματα $(1, -5, 0)', (0, 2, 1)'$. Αυτά προφανώς είναι ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή -2 και είναι εύκολο να δούμε ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητα: Ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ που τα έχει στήλες έχει την ίδια τάξη με τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ (έχω εναλλάξει την δεύτερη με την τρίτη γραμμή) που είναι ο I_2 με μία επί πλέον γραμμή, την $(-5, 2)$. Επειδή $\operatorname{rank}(I_2) = 2$, από τα Αποτελέσματα 10.2 και 10.3 και ο πίνακας B έχει τάξη 2 άρα τα δύο ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επομένως, ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ είναι τα $\underset{\sim}{e}_1 = (1, 1, 1)', \underset{\sim}{e}_2 = (1, -5, 0)', \underset{\sim}{e}_3 = (0, 2, 1)'$, αντίστοιχα, και είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (το $\underset{\sim}{e}_1$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο από τα $\underset{\sim}{e}_2, \underset{\sim}{e}_3$ μια και αντιστοιχεί σε διαφορετική ιδιοτιμή). Αυτό συνεπάγεται ότι ο πίνακας $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ που τα έχει στήλες είναι αντιστρέψιμος. Πράγματι, ισχύει $E^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ (δικό σας). Επιβεβαιώστε μόνοι σας ότι

$$E \varLambda E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix} = A.$$

Η τάξη διαγωνοποιήσιμων πινάκων συνδέεται με το πλήθος των μη μηδενικών ιδιοτιμών τους:

Αποτέλεσμα 12.4. Αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος τότε η τάξη του ισούται με το πλήθος των μη μηδενικών ιδιοτιμών του.

Απόδειξη. Αν ο $\underset{n \times n}{A}$ είναι διαγωνοποιήσιμος τότε γράφεται ως $E \varLambda E^{-1}$. Επειδή οι πίνακες E και E^{-1} είναι αντιστρέψιμοι, από το Αποτέλεσμα 10.10 παίρνουμε $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(E \varLambda E^{-1}) = \operatorname{rank}(\varLambda)$. Όμως ο $\varLambda$ είναι διαγώνιος, επομένως από το Αποτέλεσμα 10.15 η τάξη του ισούται με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του, δηλαδή το πλήθος των μη μηδενικών ιδιοτιμών του A. □

Σε περίπτωση που ο πίνακας δεν είναι διαγωνοποιήσιμος η τάξη του δεν ισούται, γενικά, με το πλήθος των μη μηδενικών ιδιοτιμών του. Για παράδειγμα, ο $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ έχει τάξη 2 αλλά δεν έχει καμμία μη μηδενική ιδιοτιμή (το μηδέν είναι τριπλή ιδιοτιμή του). Φυσικά δεν είναι διαγωνοποιήσιμος αφού έχει ένα μόνο γραμμικώς ανεξάρτητο ιδιοδιάνυσμα, το $(1, 0, 0)'$. (Επιβεβαιώστε αυτά που γράφω.)

Δύο ακόμη ενδιαφέροντα αποτελέσματα (ειδικά το δεύτερο από αυτά) είναι τα ακόλουθα:

Αποτέλεσμα 12.5. Έστω $\underset{n \times m}{A}$, $\underset{m \times n}{B}$ δύο πίνακες. Οι (τετραγωνικοί) πίνακες $\underset{n \times n}{AB}$ και $\underset{m \times m}{BA}$ έχουν τις ίδιες μη μηδενικές ιδιοτιμές.

Απόδειξη. Έστω λ μία μη μηδενική ιδιοτιμή του AB, δηλαδή $(AB)\underset{\sim}{\epsilon} = \lambda\underset{\sim}{\epsilon}$ για κάποιο $\underset{\sim}{\epsilon} \neq \underset{\sim}{0}$. Αυτό συνεπάγεται ότι $B\underset{\sim}{\epsilon} \neq \underset{\sim}{0}$ (γιατί διαφορετικά θα είχαμε $AB\underset{\sim}{\epsilon} = \underset{\sim}{0}$ που θα σήμαινε ότι $\lambda = 0$). Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με τον B παίρνουμε

$$AB\underset{\sim}{\epsilon} = \lambda\underset{\sim}{\epsilon} \Rightarrow B(AB)\underset{\sim}{\epsilon} = B(\lambda\underset{\sim}{\epsilon}) \Leftrightarrow (BA)(B\underset{\sim}{\epsilon}) = \lambda(B\underset{\sim}{\epsilon})$$

που σημαίνει ότι η λ είναι και ιδιοτιμή του BA με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $B\underset{\sim}{\epsilon}$. Για να δούμε και το ότι οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του BA είναι και ιδιοτιμές του AB δεν έχουμε παρά να εναλλάξουμε τους ρόλους των A και B στην παραπάνω απόδειξη. □

Θεωρήστε για παράδειγμα δύο πίνακες $\underset{3\times 20}{A}$ και $\underset{20\times 3}{B}$. Ο πίνακας AB είναι 3×3 επομένως έχει όλες κι όλες τρεις ιδιοτιμές. Ο πίνακας BA είναι 20×20 επομένως έχει είκοσι ιδιοτιμές. Το Αποτέλεσμα 12.5 λέει ότι οι μη μηδενικές ιδιοτιμές των δύο πινάκων συμπίπτουν. Ως εκ τούτου ο BA δεν μπορεί να έχει περισσότερες από τρεις μη μηδενικές ιδιοτιμές (αφού αυτό ισχύει για τον AB)· τουλάχιστον δεκαεπτά από τις ιδιοτιμές του θα είναι μηδέν.

Αποτέλεσμα 12.6. Έστω $\underset{n\times m}{A}$ ένας οποιοσδήποτε πίνακας. Τότε ισχύουν τα εξής:
(α) Οι ιδιοτιμές των πινάκων $\underset{m\times m}{A'A}$ και $\underset{n\times n}{AA'}$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί.
(β) Οι θετικές ιδιοτιμές τους συμπίπτουν.

Απόδειξη. (α) Αν το λ είναι μία ιδιοτιμή του $A'A$ θα υπάρχει $\underset{\sim}{\epsilon} \neq \underset{\sim}{0}$ έτσι ώστε $(A'A)\underset{\sim}{\epsilon} = \lambda\underset{\sim}{\epsilon}$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη από αριστερά με το $\underset{\sim}{\epsilon}'$ παίρνουμε

$$(A'A)\underset{\sim}{\epsilon} = \lambda\underset{\sim}{\epsilon} \Rightarrow \underset{\sim}{\epsilon}'(A'A)\underset{\sim}{\epsilon} = \underset{\sim}{\epsilon}'(\lambda\underset{\sim}{\epsilon}) \Leftrightarrow (A\underset{\sim}{\epsilon})'(A\underset{\sim}{\epsilon}) = \lambda\underset{\sim}{\epsilon}'\underset{\sim}{\epsilon} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\|A\underset{\sim}{\epsilon}\|^2}{\|\underset{\sim}{\epsilon}\|^2} \geqslant 0.$$

Η απόδειξη για τον AA' είναι παρόμοια· απλώς εναλλάσσουμε τους ρόλους των A και A'.
(β) Θέτοντας $B = A'$, από το Αποτέλεσμα 12.5 παίρνουμε ότι οι μη μηδενικές ιδιοτιμές των $A'A$ και AA' συμπίπτουν. Μια και όλες οι ιδιοτιμές τους είναι μη αρνητικές, οι μη μηδενικές ιδιοτιμές τους είναι θετικές επομένως ο ισχυρισμός είναι αληθής. □

Αν ο A έχει διαστάσεις 3×5, ποιες από τις ακόλουθες πεντάδες θα μπορούσαν να είναι ιδιοτιμές του $\underset{5\times 5}{A'A}$; (α) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$· (β) $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = \lambda_5 = 0$· (γ) $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 1, \lambda_5 = 0$; Μόνο η πεντάδα (α). Η (β) αποκλείεται γιατί οι ιδιοτιμές του $A'A$ είναι μη αρνητικές και αυτή περιλαμβάνει το -1 ενώ η (γ) αποκλείεται γιατί οι θετικές ιδιοτιμές του $A'A$ συμπίπτουν με τις θετικές ιδιοτιμές του AA' που έχει διαστάσεις 3×3 άρα έχει το πολύ τρεις θετικές ιδιοτιμές.

Έστω $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$ με $\underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{0}$. Το $\underset{\sim}{x}$ είναι ένας πίνακας διάστασης $n \times 1$. Επομένως, από το Αποτέλεσμα 12.6 οι μη μηδενικές ιδιοτιμές των πινάκων $\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{x}$ και $\underset{\sim}{x}\underset{\sim}{x}'$ συμπίπτουν. Ο πίνακας $\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{x}$ έχει διαστάσεις 1×1· στην πραγματικότητα είναι ο αριθμός $\|\underset{\sim}{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Επομένως η μοναδική «ιδιοτιμή» του είναι ο ίδιος ο αριθμός $\|\underset{\sim}{x}\|^2$. Ο πίνακας $\underset{\sim}{x}\underset{\sim}{x}'$ είναι $n \times n$ επομένως έχει n ιδιοτιμές: μία από αυτές συμπίπτει με την μοναδική θετική ιδιοτιμή του $\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{x}$, την $\|\underset{\sim}{x}\|^2$, και οι υπόλοιπες $n - 1$ είναι μηδέν.

Όπως είπαμε στην αρχή της ενότητας, οι ιδιοτιμές ενός πίνακα είναι γενικά μιγαδικοί αριθμοί. Βέβαια, στα παραδείγματα που έχουμε δει μέχρι τώρα όλες οι ιδιοτιμές ήταν πραγματικές· προφανώς τα επέλεξα επίτηδες για να μην μπλέξουμε με μιγαδικούς. Πάντως, για τους συμμετρικούς πίνακες οι οποίοι παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στη Στατιστική ισχύει το ακόλουθο:

Αποτέλεσμα 12.7. Οι ιδιοτιμές πραγματικών *συμμετρικών* πινάκων είναι πραγματικοί αριθμοί.

Για να παρακολουθήσει κανείς την απόδειξη του Αποτελέσματος 12.7 πρέπει να είναι εξοικειωμένος με τους μιγαδικούς αριθμούς γι' αυτό δεν θα την κάνουμε· απλώς δεχτείτε το.

Όπως είδαμε, ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Στην περίπτωση συμμετρικών πινάκων είναι και κάθετα μεταξύ τους:

Αποτέλεσμα 12.8. Αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$ είναι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα A και $\underset{\sim}{\epsilon}_1, \underset{\sim}{\epsilon}_2$ είναι αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τότε $\underset{\sim}{\epsilon}_1' \underset{\sim}{\epsilon}_2 = 0$.

Απόδειξη. Αφού ο A είναι συμμετρικός ισχύει $A' = A$ και συνεπώς $A\underset{\sim}{\epsilon}_1 = \lambda_1 \underset{\sim}{\epsilon}_1 \Leftrightarrow (A\underset{\sim}{\epsilon}_1)' = (\lambda_1 \underset{\sim}{\epsilon}_1)' \Leftrightarrow \underset{\sim}{\epsilon}_1' A' = \lambda_1 \underset{\sim}{\epsilon}_1' \Leftrightarrow \underset{\sim}{\epsilon}_1' A = \lambda_1 \underset{\sim}{\epsilon}_1'$. Επομένως

$$\lambda_1 \underset{\sim}{\epsilon}_1' \underset{\sim}{\epsilon}_2 = (\lambda_1 \underset{\sim}{\epsilon}_1') \underset{\sim}{\epsilon}_2 = (\underset{\sim}{\epsilon}_1' A) \underset{\sim}{\epsilon}_2 = \underset{\sim}{\epsilon}_1' (A \underset{\sim}{\epsilon}_2) = \underset{\sim}{\epsilon}_1' (\lambda_2 \underset{\sim}{\epsilon}_2) = \lambda_2 \underset{\sim}{\epsilon}_1' \underset{\sim}{\epsilon}_2$$

που σημαίνει ότι $(\lambda_1 - \lambda_2) \underset{\sim}{\epsilon}_1' \underset{\sim}{\epsilon}_2 = 0$. Επειδή $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Μία άλλη πολύ σημαντική ιδιότητα των συμμετρικών πινάκων είναι ότι σε ιδιότιμες με πολλαπλότητα $k > 1$ αντιστοιχούν πάντοτε k ανά δύο κάθετα ιδιοδιανύσματα και επομένως γραμμικώς ανεξάρτητα. Συνδυάζοντας αυτό με το Αποτέλεσμα 12.8 παίρνουμε το ακόλουθο:

Αποτέλεσμα 12.9. Κάθε συμμετρικός πίνακας $n \times n$ έχει n κάθετα ανά δύο ιδιοδιανύσματα. Επομένως τα ιδιοδιανύσματα ενός συμμετρικού πίνακα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και ο πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος.

Κανονικοποιώντας τα n ανά δύο κάθετα ιδιοδιανύσματα (δηλαδή διαιρώντας τα με τα μήκη τους) μπορούμε να τα μετατρέψουμε σε μοναδιαία. Ο πίνακας $\underset{n \times n}{E}$ που έχει στήλες τα κανονικοποιημένα και ανά δύο κάθετα ιδιοδιανύσματα του συμμετρικού πίνακα $\underset{n \times n}{A}$ είναι ορθογώνιος: $E^{-1} = E'$. Επομένως, η σχέση $A = E\Lambda E^{-1}$ στην περίπτωση συμμετρικών πινάκων γίνεται

$$A = E\Lambda E'.$$

Όπως είδαμε νωρίτερα, $E\Lambda = (\lambda_1 \underset{\sim}{\epsilon}_1 \ \lambda_2 \underset{\sim}{\epsilon}_2 \ \cdots \ \lambda_n \underset{\sim}{\epsilon}_n)$. Επομένως,

$$E\Lambda E' = (\lambda_1 \underset{\sim}{\epsilon}_1 \ \lambda_2 \underset{\sim}{\epsilon}_2 \ \cdots \ \lambda_n \underset{\sim}{\epsilon}_n) \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\epsilon}_1' \\ \underset{\sim}{\epsilon}_2' \\ \vdots \\ \underset{\sim}{\epsilon}_n' \end{pmatrix} = \lambda_1 \underset{\sim}{\epsilon}_1 \underset{\sim}{\epsilon}_1' + \lambda_2 \underset{\sim}{\epsilon}_2 \underset{\sim}{\epsilon}_2' + \cdots + \lambda_n \underset{\sim}{\epsilon}_n \underset{\sim}{\epsilon}_n'.$$

Η αναπαράσταση ενός συμμετρικού πίνακα $\underset{n\times n}{A}$ μέσω των ιδιοτιμών του $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων του $\underset{\sim}{\epsilon}_1,\ldots,\underset{\sim}{\epsilon}_n$

$$A = E\Lambda E' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underset{\sim}{\epsilon}_i \underset{\sim}{\epsilon}_i'$$

καλείται *φασματική ανάλυση* του A.

Αφού για κάθε θετικό ακέραιο k ο A^k έχει τα ίδια ιδιοδιανύσματα με τον A και ιδιοτιμές τις k δυνάμεις των ιδιοτιμών του, ισχύει

$$A^k = E\Lambda^k E' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \underset{\sim}{\epsilon}_i \underset{\sim}{\epsilon}_i'.$$

Εφ' όσον ο A είναι αντιστρέψιμος (που ισχύει αν δεν έχει κάποια μηδενική ιδιοτιμή) το παραπάνω ισχύει και για αρνητικούς ακεραίους. Π.χ.

$$A^{-1} = E\Lambda^{-1} E' = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \underset{\sim}{\epsilon}_i \underset{\sim}{\epsilon}_i'.$$

(Προς αποφυγήν παρεξηγήσεων να επαναλάβω ότι η αναπαράσταση $A = E\Lambda E'$ ισχύει όταν τα ιδιοδιανύσματα είναι κανονικοποιημένα. Σε διαφορετική περίπτωση ισχύει απλώς $A = E\Lambda E^{-1}$.)

Ας δούμε τώρα δύο παραδείγματα. Έστω ο συμμετρικός πίνακας $\underset{2\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Έχουμε

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5)$$

επομένως οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 5$ και $\lambda_2 = 0$. (Η ορίζουσα του A ισούται με μηδέν γι' αυτό και έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή ίση με μηδέν.) Για την ιδιοτιμή 5 έχουμε

$$A - 5I_2 = \begin{pmatrix} 1-5 & -2 \\ -2 & 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

και το ομογενές σύστημα $(A - 5I_2)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ έχει σύνολο λύσεων τα διανύσματα της μορφής $c(1,-2)'$, $c \in \mathbb{R}$. Θέτοντας $c = 1/\|(1,-2)'\| = 1/\sqrt{1^2 + (-2)^2} = 1/\sqrt{5}$ παίρνουμε το (μοναδιαίο) ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 5$, $\underset{\sim}{\epsilon}_1 = (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})'$. Για την ιδιοτιμή 0 έχουμε $A - 0I_2 = A$ οπότε λύνουμε το ομογενές σύστημα $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$. Το σύνολο λύσεών του είναι τα διανύσματα της μορφής $c(2,1)$, $c \in \mathbb{R}$, οπότε θέτοντας $c = 1/\|(2,1)'\| = 1/\sqrt{2^2 + 1^2} = 1/\sqrt{5}$ παίρνουμε το (μοναδιαίο) ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 0$, $\underset{\sim}{\epsilon}_2 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})'$.

Παρατηρήστε ότι τα δύο ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα:

$$\underset{\sim}{\epsilon}_1' \underset{\sim}{\epsilon}_2 = (1/\sqrt{5} \quad -2/\sqrt{5}) \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \Big(\frac{1}{\sqrt{5}}\Big)\Big(\frac{2}{\sqrt{5}}\Big) + \Big(-\frac{2}{\sqrt{5}}\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}\Big) = 0.$$

Επίσης,

$$\lambda_1 \underset{\sim}{\epsilon}_1 \underset{\sim}{\epsilon}_1' + \lambda_2 \underset{\sim}{\epsilon}_2 \underset{\sim}{\epsilon}_2' = 5 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$= 5\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) \\ \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) & \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = A$$

ενώ $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 20 \end{pmatrix}$ και

$$\lambda_1^2 \underset{\sim}{\epsilon}_1 \underset{\sim}{\epsilon}_1' + \lambda_2^2 \underset{\sim}{\epsilon}_2 \underset{\sim}{\epsilon}_2' = 5^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} + 0^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = 25 \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{pmatrix} = A^2$$

όπως προβλέπεται.

Στο δεύτερο παράδειγμα θα θεωρήσουμε τον συμμετρικό πίνακα $\underset{3\times 3}{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Εδώ έχουμε $|B - \lambda I_3| = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8 = -(\lambda - 4)(\lambda - 1)(\lambda + 2)$ άρα οι ιδιοτιμές του B είναι οι $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$.

Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 4 είναι λύση του συστήματος

$$(B - 4I_3)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

που έχει λύσεις τα διανύσματα $c(-1, 2, 1)'$, $c \in \mathbb{R}$. Θέτοντας $c = 1/\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = 1/\sqrt{6}$ παίρνουμε το μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα $\underset{\sim}{\epsilon}_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)'$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 4$.

Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1 είναι λύση του συστήματος

$$(B - 1I_3)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

που έχει λύσεις τα διανύσματα $c(-1, -1, 1)'$, $c \in \mathbb{R}$. Θέτοντας $c = 1/\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = 1/\sqrt{3}$ παίρνουμε το μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα $\underset{\sim}{\epsilon}_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)'$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$.

Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -2 είναι λύση του συστήματος

$$(B + 2I_3)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

που έχει λύσεις τα διανύσματα $c(1, 0, 1)'$, $c \in \mathbb{R}$. Θέτοντας $c = 1/\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = 1/\sqrt{2}$ παίρνουμε το μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα $\underset{\sim}{\epsilon}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)'$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_3 = -2$.

Επιβεβαιώστε μόνοι σας ότι $EE' = E'E = I_3$ και ότι $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \underset{\sim}{\epsilon}_i \underset{\sim}{\epsilon}_i' = B$, $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 \underset{\sim}{\epsilon}_i \underset{\sim}{\epsilon}_i' = B^2$. Επίσης, δείξτε ότι ο αντίστροφος του B είναι ο $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/4 & -5/8 \\ 1/4 & 1/2 & -1/4 \\ -5/8 & -1/4 & 1/8 \end{pmatrix}$ και ότι ισχύει $B^{-1} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^{-1} \underset{\sim}{\epsilon}_i \underset{\sim}{\epsilon}_i'$.